UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fernando de Ávila Silva

Hipoeliticidade Global para uma Classe de Operadores Pseudodiferenciais sobre Variedades Compactas

Curitiba, 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fernando de Ávila Silva

Hipoeliticidade Global para uma Classe de Operadores Pseudodiferenciais sobre Variedades Compactas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientadores:
Prof. Dr. Alexandre Kirilov (UFPR - Brasil)
Prof. Dr. Todor Gramchev (UNICA - Itália)

Curitiba, 2015.

S586h Silva, Fernando de Ávila

Hipoeliticidade global para uma classe de operadores pseudodiferenciais sobre variedades compactas/ Fernando de Ávila Silva. – Curitiba, 2015.
66 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Orientador: Alexandre Kirilov – Co-orientador: Todor Gramchev.
Bibliografia: p. 65-66.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Operadores diferenciais parciais. 3. Teoria espectral (Matemática). I. Universidade Federal do Paraná. II.Kirilov, Alexandre. III. Gramchev, Todor . IV. Título.

CDD: 515.353

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM

ATA DA 5ª DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

Aos quatro dias do mês de maio de 2015, no Auditório da Informática, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Alexandre Kirilov, a Banca Examinadora para a Quinta Defesa de Tese de Doutorado em Matemática. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie, da Universidade Federal de São Carlos, Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro, da Universidade de São Paulo, Prof. Sérgio Luís Zani, da Universidade de São Paulo, Prof. Dr. Cléber de Medeira, do Programa de Pós-Graduação em Matemática e o Prof. Dr. Alexandre Kirilov, orientador do projeto de tese, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às treze e trinta horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **FERNANDO DE ÁVILA SILVA** a apresentar seu Projeto de Tese intitulado: "HIPOELITICIDADE GLOBAL PARA UMA CLASSE DE OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS SOBRE VARIEDADES COMPACTAS". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 05 (cinco) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A tese apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a tese e a arguição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 04 de maio de 2015.

Prof. Dr. Alexandre Kirilov
PPGM – UFPR

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
USFCAR

Paulo D. Cordaro
Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
USP

Sérgio Luís Zani
Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Cleber de Medeira
Prof. Dr. Cléber de Medeira
PPGM – UFPR

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da tese do candidato **FERNANDO DE ÁVILA SILVA** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 04 de maio de 2015.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov
PPGM – UFPR

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
USFCAR

Paulo D. Cordaro

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
USP

Sérgio Luís Zani

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Prof. Dr. Cléber de Medeira
PPGM – UFPR

TERMO DE APROVAÇÃO

"HIPOELITICIDADE GLOBAL PARA UMA CLASSE DE OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS SOBRE VARIEDADES COMPACTAS"

por

FERNANDO DE ÁVILA SILVA

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Matemática, pela Comissão Examinadora composta por:

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov
PPGM – UFPR

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
USFCAR

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
USP

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Prof. Dr. Cléber de Medeira
PPGM – UFPR

Curitiba, 05 de maio de 2015.

À minha mãe, meu pai, irmão e irmãs.

Agradecimentos

Esta parte do texto é sempre uma tarefa difícil de se fazer, pois deseja-se encontrar as palavras que possam descrever o quão grato sou a várias pessoas, entretanto tentarei em poucas linhas expressar tal sentimento.

Devo começar lembrando de todos os esforços de minha mãe, Dona Terezinha. Eu poderia escrever um texto tentando descrever toda a sua luta, dia após dia, para que eu chega-se a este momento, porém acho que basta lembrar uma frase que ela me disse antes de meu ingresso na graduação: "Largue este trabalho que te deixa infeliz, vá estudar e buscar sua felicidade".

Junto com todos os esforços de minha mãe estão os de meus irmãos Carlos, Eunice e Lilian. Digo aqui que eu jamais teria conseguido sem eles estarem ao meu lado. Devo também lembrar do apoio e amizade do Sílvio, e de toda a alegria dos meus sobrinhos Mateus, Carolina e Igor.

Quero deixar escrito também sobre todos os momentos de felicidade que meu pai Geraldo me proporcionou e espero estar proporcionado o mesmo para ele.

Aos amigos de longa data: Euler, Jacke, Kelly, Lilian, Ricardo, Tiago, Thiago, Wilton penso que é necessário (porém longe de ser suficiente) escrever "obrigado". O mesmo escrevo aos amigos do PPGM: Camila, Geovani, Marcos, Stela e Teles.

Ao meu orientador Alexandre Kirilov, agradeço pela amizade, dedicação e confiança que já completam uma década. As mesmas palavras de agradecimento se aplicam ao também orientador Todor Gramchev.

Agradeço aos professores do PPGM pela oportunidade e apoio dados nesses anos, em especial a professora Elizabeth. Neste ponto agradeço também aos esforços da Cinthia Souza.

Por fim, em posição de destaque, agradeço a minha noiva Pamela por toda paciência, carinho e apoio sem os quais eu não poderia chegar até aqui.

"Penso que cumprir a vida seja simplesmente
compreender a marcha e ir tocando em frente."

Almir Sater e Renato Teixeira

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar a hipoeliticidade global para uma classe de operadores do tipo

$$L = D_t + C(t, x, D_x), \quad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \quad x \in M,$$

sendo M uma variedade suave, fechada (compacta e sem bordo) e $C(t, x, D_x)$ é um operador pseudodiferencial, de primeira ordem, definido sobre M, o qual depende suavemente da variável periódica t.

Palavras-chave: *Hipoeliticidade global, operadores pseudodiferenciais, fórmula assintótica de Weyl, variedades compactas*

Abstract

The main goal on this work is to investigate the global hypoellipticity of the following class of operators

$$L \doteq D_t + C(t, x, D_x), \quad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \quad x \in M,$$

where M is a closed (compact without boundary) smooth manifold and $C(t, x, D_x)$ is a first order pseudodifferential operator on M, smoothly depending on the periodic variable t.

Keywords: *Global hypoellipticity, pseudo-differential operators, Weyl's asymptotic formula, compact manifolds*

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é investigar a Hipoeliticidade Global para uma classe de operadores do tipo

$$L \doteq D_t + C(t,x,D_x), \quad (t,x) \in \mathbb{T} \times M,$$

sendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ o toro unidimensional, M uma variedade fechada e suave e $C(t,x,D_x)$ um operador pseudodiferencial de primeira ordem sobre M, que depende suavemente da variável periódica t.

Recordamos que o operador L é globalmente hipoelítico em $\mathbb{T} \times M$, abreviadamente (GH), se

$$u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M) \;\; e \;\; Lu \in C^\infty(\mathbb{T} \times M) \;\; implica\ em \;\; u \in C^\infty(\mathbb{T} \times M).$$

Enfatizamos que o estudo da hipoeliticidade global para uma classe de operadores tão ampla é um problema não-trivial que aparentemente não admite uma abordagem única, mesmo no caso em que $C(t,x,D_x)$ é um operador diferencial de primeira ordem e M é o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$, como pode ser verificado nas referências [1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 15, 16, 22].

Também relembramos a célebre conjectura de Greenfield-Wallach, ver [13]: se uma variedade suave fechada conexa e orientável admite um campo vetorial suave globalmente hipoelítico, então essa variedade é difeomorfa a um toro e esse campo vetorial é conjugado a um campo vetorial Diofantino. Tal conjectura foi provada completamente em dimensões 2 e 3 e em alguns casos particulares, por exemplo, quando a variedade é o quociente de um grupo de Lie por um subgrupo fechado co-compacto, ver [8, 13, 16, 19].

Inspirados no trabalho [14] de Greenfield-Wallach, no qual os autores investigam a hipoeliticidade global para operadores diferenciais que comutam com um operador diferencial elíptico E fixado, introduzimos as hipóteses basilares em nosso trabalho.

Em primeiro lugar, fixamos um operador elíptico $E(x,D_x)$ sobre M tal que

$$[C(t,x,D_x), E(x,D_x)] = 0, \; \forall\, t \in \mathbb{T},$$

e também assumimos que

$$C(t,x,D_x) \text{ é normal, ou seja, } \; C^*C = C\,C^*.$$

Aqui C^* denota o operador adjunto de C, com respeito ao espaço $L^2(M, dx)$, sendo dx uma medida positiva sobre M.

Escrevendo

$$C(t,x,D_x) = A(t,x,D_x) + iB(t,x,D_x), \tag{0.1}$$

com

$$A = \frac{C + C^*}{2} \quad \text{e} \quad B = \frac{C - C^*}{2i},$$

nossas hipóteses são equivalentes a: para cada $t \in \mathbb{T}$ vale:

$$A(t,x,D_x) = A^*(t,x,D_x) \;\; e \;\; B(t,x,D_x) = B^*(t,x,D_x); \tag{0.2}$$

$$[A(t,x,D_x), E(x,D_x)] = 0 \;\; e \;\; [B(t,x,D_x), E(x,D_x)] = 0; \tag{0.3}$$

$$[A(t,x,D_x), B(t,x,D_x)] = 0; \tag{0.4}$$

Neste trabalho nos restringimos ao estudo do caso particular de separação de variáveis, ou seja,

$$A(t,x,D_x) = a(t) \otimes p(x,D_x) \;\; \text{e} \;\; B(t,x,D_x) = b(t) \otimes q(x,D_x) \tag{0.5}$$

sendo a e b funções reais suaves definidas no toro unidimensional $\mathbb{T}$ e $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ operadores pseudodiferenciais de primeira ordem sobre M.

Nesse caso as hipóteses (0.2), (0.3) e (0.4) podem ser reescritas (respectivamente) na seguinte forma:

$$p(x,D_x) = p^*(x,D_x) \;\; e \;\; q(x,D_x) = q^*(x,D_x); \tag{0.6}$$

$$[p(x,D_x), E(x,D_x)] = 0 \;\; e \;\; [q(x,D_x), E(x,D_x)] = 0; \tag{0.7}$$

$$[p(x,D_x), q(x,D_x)] = 0; \tag{0.8}$$

Assim, os operadores $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ são simultaneamente diagonalizáveis sobre os auto- espaços associados ao operador elíptico E, e portanto existe um operador unitário S tal que

$$S^* \cdot p(x,D_x) \cdot S \;\; \text{e} \;\; S^* \cdot q(x,D_x) \cdot S. \tag{0.9}$$

são diagonais sobre os auto-espaços de E.

Nestas condições podemos enunciar os principais resultados de nosso trabalho: *considere o operador*

$$L = D_t + a(t)p(x,D_x) + ib(t)q(x,D_x), \quad (t,x) \in \mathbb{T} \times M, \tag{0.10}$$

em que $a, b \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathbb{R})$ e $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ são operadores pseudodiferenciais de primeira ordem sobre M satisfazendo as hipóteses (0.6), (0.7), (0.8). *Defina por μ_j e ν_j, $j \in \mathbb{N}$, os elementos das diagonais de $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ dadas em* (0.9) *e admita que $|\nu_j|$ diverge para o infinito.*

Assim, se $b \not\equiv 0$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) *Se b não muda de sinal, então L é (GH);*

(b) *Se b muda de sinal e o crescimento de $|\nu_j|$ é super-logarítmico, isto é, existe uma subsequência $\{\nu_{j_k}\}_k$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\nu_{j_k}|}{\log(j_k)} = +\infty,$$

então L não é (GH);

(c) *Se o crescimento de $|\nu_j|$ é no máximo logarítmico, ou seja,*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{|\nu_j|}{\log(j)} = \kappa < +\infty,$$

então o operador L é (GH) se, e somente se, o operador

$$L_{a_0,b_0} = D_t + a_0 p(x,D) + i b_0 q(x,D)$$

é (GH), sendo a_0 e b_0 são as médias de a e b sobre $\mathbb{T}$, respectivamente.

Convém ressaltar que, a partir dos itens (a) e (b) acima, reobtemos os resultados de Hounie, em [15], para o caso diferencial apresentando uma nova demonstração. Além disso, estendemos esses resultados para uma classe de operadores mais ampla e passamos a compreender melhor a influência da velocidade da divergência da sequência $\{\nu_j\}$ na avaliação da regularidade de L.

Já o item (c) representa uma grande novidade nos estudo da hipoeliticidade global de operadores lineares do tipo L, pois a partir desse resultado, constatamos que é possível construir um operador (GH) da forma (0.10) com parte imaginária mudando de sinal. (Obviamente tal operador não será diferencial e portanto não obtivemos contra-exemplos para a conjectura de Greenfield-Wallach).

Retornando ao enunciado de nossos principais resultados, suponha agora que $b \equiv 0$. Neste caso, o operador (0.10) se escreve como

$$L_a = D_t + a(t) p(x, D_x), \quad (t,x) \in \mathbb{T} \times M. \tag{0.11}$$

Nas mesmas condições para $p(x,D_x)$ e a descritas anteriormente temos que: *o operador L_a é (GH) se, e somente se, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_0\mu_j \notin \mathbb{Z}$, para $j \geqslant j_0$, e a média a_0 é não-Liouville com respeito a sequência $\{\mu_j\}$, isto é, existem $\delta > 0$, $C > 0$ e $R \gg 1$ tais que*

$$\inf_{\ell\in\mathbb{Z}} |a_0\mu_j + \ell| \geqslant C j^{-\delta}, \ \forall j \geqslant R. \tag{0.12}$$

Note que, na desigualdade acima, se a sequência $\{\mu_j\}$ percorrer $\mathbb{Z}$, tal definição coincide com a definição usual de número irracional não-Liouville, logo (0.12) apresenta um novo fenômeno Diofantino.

Para exemplificar estes resultados, considere sobre $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_t \times \mathbb{T}_x$ os operadores

$$L = D_t + a(t)D_x + i\,b(t)\log^{\rho}(2+|D_x|),$$
$$L_{a_0,b_0} = D_t + \ a_0\ D_x + \ i\,b_0\ \log^{\rho}(2+|D_x|),$$

sendo $\rho > 0,\ a, b \in C^{\infty}(\mathbb{T} : \mathbb{R})$. No caso em que $b \not\equiv 0$, temos:

1. Se $\rho > 1$, o operador L é (GH) se, e somente se, b não muda de sinal;

2. Se $\rho \leqslant 1$, o operador L é (GH) se, e somente se, L_{a_0,b_0} é (GH), ou seja, se a média $b_0 \neq 0$ ou se $b_0 = 0$ e a_0 é um irracional não-Liouville;

Note então que L definido acima pode ser (GH) mesmo quando a parte imaginária b muda de sinal, ou seja, nossos resultados permitem gerar exemplos de operadores de primeira ordem globalmente hipoelíticos que não satisfazem a célebre condição $(\mathscr{P})$ de Niremberg-Treves. Discutimos este exemplo com mais detalhes na seção 2.2.

Organizamos este texto da seguinte forma: No capítulo 1 fixamos as principais notações e resultados referentes aos espaços funcionais utilizados e apresentamos as propriedades espectrais dos operadores pseudodiferenciais elípticos. Em especial exibimos a fórmula assintótica de Weyl, da qual obtém-se uma caracterização conveniente dos espaços das distribuições $\mathscr{D}'$ e das funções C^{∞} sobre M e também sobre $\mathbb{T} \times M$, bem como dos espaços de Sobolev $\mathscr{H}^s(M)$, através do comportamento dos coeficientes de Fourier obtidos através das bases de autofunções geradas por operadores elípticos.

No capítulo 2 descrevemos precisamente os resultados apresentados nesta introdução e exibimos uma comparação entre os nossos resultados e àqueles obtidos por Hounie, em [15].

Apresentamos no terceiro capítulo a redução à forma normal do operador L, dado em (0.11), a qual permite estudar, de modo equivalente, a regularidade de operadores com coeficientes constantes. Destaca-se aqui que sob condições especiais para a sequência $\{\nu_j\}$, tal redução pode também ser feita para a parte imaginária de L.

Na sequência, capítulo 4, apresentamos a demonstração de nosso resultado principal, a saber: teorema 2.3.

No capítulo 5 apresentamos algumas considerações a respeito de certas hipóteses utilizadas no teorema principal. Em particular, mostramos que na ausência da condição $|\nu_j| \to \infty$ o operador (0.10) pode ser não (GH) ainda que a parte imaginária não mude sinal e $b \not\equiv 0$.

Por fim, no último capítulo fazemos uma breve discussão sobre a generalização de nosso resultados para algumas classes de operadores em espaços de Hilbert.

Capítulo 1

Espaços Funcionais e a Fórmula de Weyl

No presente capítulo fixamos notações e indicamos resultados que permitem caracterizar os espaços funcionais considerados neste trabalho. Dentre estes resultados, citamos aqui as propriedades espectrais dos operadores elípticos e, em particular, a fórmula assintótica de Weyl pela qual obtemos uma caracterização conveniente dos espaços das distribuições e das funções suaves sobre M e $\mathbb{T} \times M$, bem como dos espaços de Sobolev $\mathscr{H}^s(M)$.

Para os resultados mais relevantes para este trabalho indicamos onde suas demonstrações podem ser encontradas. Os resultados clássicos são enunciados sem indicação precisa. Entretanto, as notações e resultados apresentados seguem de perto a apresentação feita por Shubin, [25].

1.1 Notações Básicas

Consideramos o espaço $\mathbb{R}^n$ dotado com a estrutura Euclidiana usual dada por

$$x \cdot y = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell, \quad |x|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2,$$

sendo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Cada elemento do conjunto $\mathbb{Z}_+^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n;\ \alpha_j \geqslant 0\}$ é chamado de multi-índice. Em particular, denotamos $\mathbb{N}_0 \doteq \mathbb{Z}_+^1$. O comprimento e o fatorial de um multi-índice são, por definição, os números

$$|\alpha| = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \quad \text{e} \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!,$$

respectivamente. Dados dois multi-índices α e β dizemos que $\alpha \leqslant \beta$ se $\alpha_j \leqslant \beta_j$, para cada $j = 1, \dots, n$. Desta forma temos a fórmula binomial:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, & \text{se } \beta \leqslant \alpha, \\ 0, & \text{se } \beta > \alpha. \end{cases}$$

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ escrevemos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. O símbolo ∂_{x_j} denota o operador diferencial ∂/∂_{x_j}, para $j \in \{1, \ldots, n\}$ e

$$D_j = i^{-1}\partial_{x_j},$$

em que i é a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, denotamos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

assim, a regra de Leibnitz assume a forma

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(f) D^{\alpha-\beta}(g).$$

Dado um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o espaço das funções teste, denotado por $C_c^\infty(\Omega)$, consiste de todas as funções suaves com suporte compacto. A topologia em $C_c^\infty(\Omega)$ é dada pela seguinte noção de convergência: uma sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero neste espaço se existe algum compacto $K \subset \Omega$, tal que supp $(\varphi_j) \subset K$, para todo j, e ainda

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \longrightarrow 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Definição 1.1 *O espaço das distribuições $\mathscr{D}'(\Omega)$ é o conjunto de todos os funcionais lineares, sequencialmente contínuos, $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$. Dizemos que uma sequência $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ converge para $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se, para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vale que*

$$u_j(\varphi) \longrightarrow u(\varphi), \quad \textit{quando } j \to \infty.$$

Define-se ainda, para cada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ a distribuição

$$D^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi).$$

Se $\psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega_2)$, então tem-se a distribuição $u_\psi \in \mathscr{D}'(\Omega_1)$ definida por

$$u_\psi(\varphi) = u((\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot |J|), \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega_1),$$

em que J denota o determinante Jacobiano de ψ^{-1}.

Ao longo deste texto $M = (M^n, dx)$ indica uma variedade suave, n-dimensional, fechada (compacta e sem bordo) munida de uma medida positiva dx. Considere um sistema de coordenadas suaves sobre M, ou seja, uma família $\mathscr{F}$ de homeomorfismos χ de abertos $\Omega_\chi \subset M$ sobre subconjuntos abertos $\widetilde{\Omega}_\chi \subset \mathbb{R}^n$, que satisfazem as seguintes condições:

(a) Para cada par χ_σ, $\chi_\alpha \in \mathscr{F}$ as seguintes aplicações são difeomorfismos suaves:

$$\chi_\sigma \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha\left(\Omega_\alpha \cap \widetilde{\Omega}_\sigma\right) \longrightarrow \chi_\sigma\left(\Omega_\alpha \cap \widetilde{\Omega}_\sigma\right)$$

(b) A família Ω_χ é uma cobertura de M, ou seja, $\bigcup\limits_{\chi\in\mathscr{F}} \Omega_\chi = M$.

Definição 1.2 *Seja $\mathscr{F}$ um sistema de coordenadas sobre M. Se para cada χ obtém-se uma distribuição $u_\chi \in \mathscr{D}'(\widetilde{\Omega}_\chi)$ tal que*

$$u_{\chi_\alpha} = u_\chi \circ (\chi_\sigma \chi_\alpha^{-1}), \;\; \textit{em} \;\; \chi_\alpha\left(\Omega_\chi \cap \widetilde{\Omega}_{\chi_\sigma}\right),$$

dizemos que o sistema u_χ define uma distribuição u em M. O espaço das distribuições em M é denotado por $\mathscr{D}'(M)$.

1.2 Operadores Pseudodiferenciais

Sejam m, ρ e δ números reais, com $0 \leqslant \delta, \rho \leqslant 1$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. A classe dos símbolos de ordem m em Ω é o conjunto de todas as funções $a(x,\theta) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ a valores complexos, tais que, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ e todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante positiva $C = C_{\alpha,\beta,K}$ satisfazendo

$$|\partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta a(x,\theta)| \leqslant C \, \langle\theta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

sendo $\langle\theta\rangle = (1+|\theta|^2)^{1/2}$. Essa classe é denotada por $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, ou simplesmente por $S^m_{\rho,\delta}$ quando estiver claro o aberto Ω.

Definição 1.3 *Considere uma sequência de funções $a_j(x,\theta) \in S^{m_j}_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, tal que $m_j \to -\infty$, quando $j \to \infty$. Dada uma função $a(x,\theta) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ escrevemos*

$$a(x,\theta) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x,\theta), \tag{1.1}$$

se para todo inteiro $r \geqslant 2$ tem-se

$$a(x,\theta) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j(x,\theta) \in S^{\overline{m_r}}_{\rho,\delta},$$

sendo $\overline{m_r} = \max\{m_j;\; j \geqslant r\}$. Diz-se que (1.1) é a expansão assintótica de $a(x,\theta)$.

Definição 1.4 *Um símbolo $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ é dito clássico se existe uma expansão assintótica*

$$a(x,\theta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(x,\theta), \tag{1.2}$$

tal que cada a_{m-j} é homogêneo de ordem $m-j$, isto é,

$$a_{m-j}(x,t\theta)=t^{m-j}a_{m-j}(x,\theta),\ \forall t>0,\ \forall|\theta|\geqslant 1.$$

O elemento $a_m(x,\theta)$ é dito o símbolo principal de $a(x,\theta)$. O espaço dos símbolos clássicos é denotado por $CS^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.5 *Fixado um símbolo $a\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$, chamamos de operador pseudodiferencial, ou o.p.d. de modo abreviado, a aplicação linear*

$$Au(x)=\int\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,y,\xi)u(y)dy\,d\xi,\ \ x\in\Omega,\ \ u\in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.3}$$

A distribuição $K_A\in\mathscr{D}'(\Omega\times\Omega)$ definida por

$$<K_A,\omega>=\int\int\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,y,\xi)\omega(x,y)dx\,dy\,d\xi,\ \ x\in\Omega,\ \ \omega\in C_c^\infty(\Omega\times\Omega).$$

é chamada de núcleo de A. A classe dos o.p.d's, com símbolo $a\in S^m_{\rho,\delta}$, é denotada por $\Psi^m_{\rho,\delta}$. Também utilizamos as notações

$$\Psi^m=\Psi^m_{1,0},\ \ \Psi^{+\infty}=\bigcup_{m\in\mathbb{R}}\Psi^m\quad e\quad \Psi^{-\infty}=\bigcap_{m\in\mathbb{R}}\Psi^m.$$

A classe dos o.p.d's com símbolos clássicos é representada por $\mathscr{C}^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$.

Denotamos por supp $(K_A)\subset\Omega\times\Omega$ o suporte de K_A e por

$$\Pi_1:\text{supp }K_A\to\Omega\quad\text{e}\quad\Pi_2:\text{supp }K_A\to\Omega$$

as restrições das aplicações de projeção. Assim, um operador pseudodiferencial A é dito propriamente suportado se ambas projeções Π_1,Π_2 são aplicações próprias. De modo análogo, dizemos que $a(x,y,\xi)$ é propriamente suportada se as projeções

$$\Pi_1,\Pi_2:\text{supp }_{x,y}a(x,y,\xi)\longrightarrow\Omega,$$

são aplicações próprias.

Definição 1.6 *O símbolo de um o.p.d. propriamente suportado A é a função σ_A definida por*

$$\sigma_A(x,\xi)=e^{-ix\cdot\xi}\cdot A\cdot e^{ix\cdot\xi},\ \ (x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n.$$

Neste caso podemos escrever

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\sigma_A(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi,\ \ u\in C_c^\infty(\Omega).$$

Proposição 1.1 *Seja A um o.p.d. propriamente suportado dado por* (1.3) *e $\sigma_A(x,\xi)$ seu símbolo. Se $\delta<\rho$, então*

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\, a(x,y,\xi)\big|_{y=x},$$

sendo a soma tomada sobre todos os multi-índices α.

Definição 1.7 *Um operador $E\in\mathscr{C}^m_{1,0}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$, com $m>0$, é dito elíptico se seu símbolo principal $a_m(x,\xi)$ satisfaz a seguinte condição:*

$$a_m(x,\xi)\neq 0,\;\;(x,\xi)\in\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus 0).$$

O espaço dos o.p.d.'s elípticos, de ordem m, sobre Ω será denotado por $\mathscr{E}^m(\Omega)$.

Definição 1.8 *Seja A um operador pseudodiferencial propriamente suportado com símbolo $\sigma_A(x,\xi)$. O operador A^* que satisfaz a igualdade*

$$(Au,v)=(u,A^*v),\;\;\forall u,v\in C_c^\infty(\Omega)$$

é dito o adjunto de A, sendo

$$(u,v)=\int u(x)\overline{v(x)}dx.$$

O próximo resultado garante que A^* pertence a $\Psi^m_{\rho,\delta}$.

Proposição 1.2 *Seja $A\in\Psi^m_{\rho,\delta}$ propriamente suportado com símbolo σ_A. Defina σ_A^* pondo*

$$\sigma_A^*(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\overline{\sigma_A(x,\xi)}.$$

Então A^* é um operador pseudodiferencial propriamente suportado com símbolo $\sigma_A^*\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Sejam A e B dois operadores pseudodiferenciais propriamente suportados com símbolos σ_A e σ_B pertencentes a $S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega)$ e $S^{m_2}_{\rho,\delta}(\Omega)$, respectivamente. Defina

$$\sigma_{BA}(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_B(x,\xi)D_x^\alpha\sigma_A(x,\xi).$$

Proposição 1.3 *Se $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, então a composta $C=BA$ é também um o.p.d. propriamente suportado, com símbolo $\sigma_{BA}\in\Psi^{m_1+m_2}(\Omega)$.*

Operadores Pseudodiferenciais sobre Variedades

Sejam $\chi : \Omega_1 \to \Omega_2$ um difeomorfismo entre abertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ e χ^* o isomorfismo

$$\begin{aligned} \chi^* : C_c^\infty(\Omega_2) &\longrightarrow C_c^\infty(\Omega_1) \\ u &\longmapsto \chi^* u(x) \doteq u \circ \chi(x). \end{aligned}$$

Fixado um operador pseudodiferencial A, prop. sup. em Ω_1, defina a aplicação

$$A_1 u = A(\chi^* u) \circ \chi^{-1}, \tag{1.4}$$

a qual pode ser escrita, pela expressão (1.3), como

$$A_1 u(x) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(\chi_1(x) - \chi_1(z))\cdot\xi} a(\chi_1(x), \chi_1(z), \xi) u(z) |\det \chi_1'(z)| \, dz \, d\xi,$$

sendo $\chi_1 = \chi^{-1}$ e $y = \chi_1(z)$.

Proposição 1.4 *Sejam $\chi : X \to X_1$ um difeomorfismo e $A \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\Omega_1)$ prop. sup. tal que $1-\rho \leqslant \delta < \rho$. Então o operador A_1, dado por (1.4), pertence a classe $\Psi^m_{\rho,\delta}(\Omega_2)$. Além disso,*

$$\sigma_{A_1}(y,\eta)|_{y=\chi(x)} \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \sigma_A^{(\alpha)}(x, [\chi'(x)]^t \eta) \cdot D_z^\alpha e^{i\chi_z''\cdot\eta}|_{z=x},$$

sendo $\sigma_A^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha \sigma_A(x,\xi)$ e $\chi_x''(z) = \chi(z) - \chi(x) - \chi'(x)(z-x)$.

Demonstração: Ver teorema 4.2 em [25]. ■

Sejam M uma variedade e $A : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ um operador linear. Suponha que $\chi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ seja um sistema de coordenadas, tal que χ é um difeomorfismo sobre $\widetilde{\Omega}$. Assim podemos definir o operador linear $A_1 : C_c^\infty(\widetilde{\Omega}) \to C^\infty(\widetilde{\Omega})$ através do diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{A} & C^\infty(\Omega) \\ \chi^* \uparrow & & \chi^* \uparrow \\ C_c^\infty(\widetilde{\Omega}) & \xrightarrow{A_1} & C^\infty(\widetilde{\Omega}) \end{array}$$

Definição 1.9 *Um operador linear $A : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é um operador pseudodiferencial sobre M se, para todo sistema de coordenadas (por difeomorfismos) χ, o operador A_1 é o.p.d. em $\widetilde{\Omega}$.*

Segue da proposição 1.4 que as classes de símbolos $S^m_{\rho,\delta}(T^*M)$ e dos operadores $\Psi^m_{\rho,\delta}(M)$ estão bem definidas para $1-\rho \leqslant \delta \leqslant \rho$. Em particular, o símbolo principal fica bem definido como um elemento do espaço quociente

$$S^m_{\rho,\delta}(T^*M)/S^{m-2(\rho-1/2)}_{\rho,\delta}(T^*M).$$

Uma vez que os espaços CS^m e $\mathscr{C}^m$ são também invariantes por difeomorfismos, fica bem definida a classe $\mathscr{C}^m_{\rho,\delta}(M)$, para $1-\rho \leqslant \delta \leqslant \rho$. Além disso, se $A \in \mathscr{C}^m_{\rho,\delta}(M)$, então seu símbolo principal $\sigma_A(x,\xi)$ pode ser visto como uma função homogênea de grau m definida sobre T^*M. Logo, fica bem definida a classe dos operadores elípticos $\mathscr{E}^m(M)$.

Teorema 1.5 *Seja A um operador pseudodiferencial em $\Psi^m_{\rho,\delta}(M)$. Então:*

i. Existe uma extensão contínua $A : \mathscr{D}'(M) \longrightarrow \mathscr{D}'(M)$;

ii. Para cada $s \in \mathbb{R}$, tem-se o operador linear contínuo $A : \mathscr{H}^s(M) \longrightarrow \mathscr{H}^{s-m}(M)$;

Demonstração: Ver teorema 7.1 em [25]. ■

1.2.1 Espectro de Operadores Elípticos

Dado um operador elíptico $E \in \mathscr{E}^m(M)$ podemos considerar sua extensão (não necessariamente contínua) E_0 ao espaço $L^2(M)$, tomando como domínio de E o espaço $\mathscr{H}^m(M)$. O seguinte resultado descreve o espectro do operador E_0, para o qual utilizamos a mesma a notação $E = E_0$.

Teorema 1.6 *Dado um operador elíptico $E \in \mathscr{E}^m(M)$, existem uma sequência de números reais $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e uma de funções $\{\varphi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $C^\infty(M)$ tais que:*

(a) *$E \cdot \varphi_j = \lambda_j \varphi_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $|\lambda_j| \to \infty$;*

(b) *O espectro spec(E) coincide com o conjunto de autovalores de E;*

(c) *$\{\varphi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2(M)$;*

(d) *O auto-espaço E_{λ_j} possui dimensão finita, para cada $j \in \mathbb{N}$;*

Demonstração: Ver teoremas 8.3 e 8.4, referência [25]. ■

Observação 1.1 *Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda_j > 0$. De fato, caso isto não ocorra, basta considerar o operador $E_+ = E^*E$, então*

$$(E_+u, u)_{L^2(M)} = (Eu, Eu)_{L^2(M)} \geqslant 0,$$

de modo que os autovalores de E_+ são $\lambda_j^2 \geqslant 0$. Agora, se $0 \in \sigma(E)$, defina $E_c = (E^*E + c)^{1/2}$, sendo c uma constante positiva. Assim spec$(E_c) = \{\widetilde{\lambda}_j = (\lambda_j^2 + c)^{1/2},\ j \in \mathbb{N}\}$, de modo que as autofunções de E_c são as mesmas de E.

Finalmente, reordenando os autovalores de E, caso seja necessário, podemos supor

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j \to \infty.$$

Proposição 1.7 *Seja $a(x,D_x)$ um operador pseudodiferencial em $\Psi^{\nu}(M)$ que comuta com um operador elíptico $E\in\mathscr{E}^m(M)$. Então, $a(x,D_x)$ também comuta com E_c.*

Demonstração: Uma vez que $a(x,D_x)$ é E_{λ_j}-invariante, podemos obter $\gamma_k^j\in\mathbb{C}$ tais que

$$p(x,D_x)\cdot\varphi_j=\sum_{k=1}^{d_j}\gamma_k^j\psi_k^j(x),$$

sendo $\{\psi_k^j(x)\}_{k=1}^{d_j}$ uma base do auto-espaço E_{λ_j}. Mostramos no teorema 1.10, página 15, que cada $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ por ser escrita como $u=\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j(t)\varphi(x)$, com tal série convergindo na topologia de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$. Assim,

$$\begin{aligned}
a(x,D_x)\circ E_c\cdot u=&a(x,D_x)\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j(t)\,\widetilde{\lambda}_j\;\varphi_j(x)\right)\\
&=\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j(t)\,\widetilde{\lambda}_j\;a(x,D_x)\cdot\varphi_j(x)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d_j}u_j(t)\,\widetilde{\lambda}_j\;\gamma_k^j\;\psi_k^j(x)\\
&=\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d_j}u_j(t)\,\gamma_k^j\;E_c\cdot\psi_k^j(x)=E_c\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j(t)\,a(x,D_x)\cdot\varphi_j(x)\right)\\
&=E_c\circ a(x,D_x)\cdot u.
\end{aligned}$$

■

1.2.2 Operadores Elípticos em $\mathbb{T}^n$ com Autovalores Simples

Mostramos no capítulo 2 que o estudo da hipoeliticidade global do operador L, dado por (0.10), pode ser restringida (com hipóteses adequadas) ao caso em que todos os auto-espaços do operador elíptico E são unidimensionais.

Nesse sentido, o objetivo desta seção é exibir exemplos de operadores elípticos em $\mathbb{T}^n$ que possuem apenas autovalores simples. Em particular, a existência de tais operadores nos permite recuperar os resultados clássicos, como [12] e [14], para hipoeliticidade global de campos vetoriais no toro.

Para tanto, sejam $\omega=(\omega_j)\in\mathbb{R}^n$ e

$$\mathrm{Res}(\omega)\doteq\{z\in\mathbb{Z}^n;\;<\omega,z>_{\mathbb{R}^n}=0\}$$

o conjunto das ressonâncias de ω.

Se $\mathrm{Res}(\omega)=\{0\}$, então dizemos que $\omega\in\mathbb{R}^n$ é um vetor não-resonante. Em particular, se ω é não resonante, então as n coordenadas ω_j são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.

De fato, sejam $p_j/q_j \in \mathbb{Q}$, $j \in \{1,\dots n\}$ tais que $\sum_{j=1}^{n} \omega_j \alpha_j = 0$, então definindo por ρ o mínimo múltiplo comum entre os números q_j obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \frac{\alpha_j}{\rho} = 0, \text{ sendo } \alpha_j = p_j \cdot q_1 \cdot \ldots \widehat{q_j} \ldots \cdot q_n,$$

onde $\widehat{q_j}$ indica a ausência do termo q_j, logo $p_j = 0$, para cada j.

Na proposição a seguir obtemos operadores elípticos com auto-espaços unidimensionais.

Proposição 1.8 *Para cada $j \in \{1,\dots,n\}$ escolha $c_j \in \mathbb{Q}$, $\omega_j > 0$ e defina o operador elíptico*

$$E_\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (D_{x_j} - c_j)^2. \tag{1.5}$$

Então, a seguinte condição é suficiente para que E_ω possua apenas autovalores simples:

$$\omega \textit{ é não-resonante e } 2c_j \notin \mathbb{Z},\ j = 1,\dots,n. \tag{1.6}$$

Demonstração: Note que os autovalores de E_ω são os números

$$\lambda_\xi = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (\xi - c_j)^2, \quad \xi \in \mathbb{Z}.$$

Então, se $\lambda_\xi = \lambda_\eta$, para algum $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \left[2c_j(\eta - \xi) + \xi^2 - \eta^2\right] = 0. \tag{1.7}$$

Suponha, por contradição, que (1.6) seja válido mas (1.7) seja possível para $\xi \neq \eta$. Como o vetor ω é não-resonante, segue de (1.7) e da independência linear sobre os racionais que

$$2c_j(\eta - \xi) + \xi^2 - \eta^2 = 0, \ j = 1,\dots n,$$

portanto $2c_j = \eta + \xi \in \mathbb{Z}$, uma contradição.

∎

1.3 Fórmula Assintótica de Weyl

Uma das técnicas presentes na literatura para se estudar a regularidade das soluções de uma equação diferencial $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, consiste em se determinar a velocidade de convergência dos coeficientes de Fourier de $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Pela natureza dos operadores tratados neste trabalho, não é possível aplicar diretamente está técnica, entretanto podemos adapta-la para o estudo das soluções $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$ do problema

$$Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T} \times M).$$

Fixado um operador elíptico $E \in \mathscr{E}^m(M)$, segue do teorema 1.6 que podemos escrever

$$L^2(M) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} E_{\lambda_j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

em que E_{λ_j} denota o auto-espaço de E, associado ao autovalor λ_j e $\{\varphi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal sobre $L^2(M)$. Supondo possível escrever

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j(t)\varphi_j(x),$$

sendo $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{T})$, então a ideia é obter condições (necessárias e suficientes) para se garantir $u \in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$ através do comportamento dos coeficientes $u_j(t)$. Assim, esta seção tem como objetivo formalizar esta ideia.

Considere $E \in \mathscr{E}^m(M)$, como acima, tal que seu símbolo $\sigma_m(x,\xi)$ satisfaça $\sigma_m(x,\xi) \geqslant 0,\ \xi \neq 0$. Segue da observação 1.1 que podemos supor $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, logo estão bem definidas as funções

$$N(s) \doteq \sum_{\lambda_j \leqslant s} 1 \quad \text{e} \quad V(s) \doteq (2\pi)^{-n} \int\int_{\sigma_m(x,\xi)<s} dx\,d\xi.$$

Note que $N(s)$ é o número de autovalores não excedentes a s, por outro lado, a integral na definição de $V(s)$ é exatamente o volume em T^*M do conjunto dos pontos (x,ξ), tais que $\sigma_m(x,\xi) < s$.

Teorema 1.9 (Fórmula Assintótica de Weyl) *Seja E um operador como descrito acima. Então*

i. $N(\lambda) \sim V(\lambda)$, *para* $\lambda \to \infty$*;*

ii. $N(\lambda) = V(1)\,\lambda^{\frac{n}{m}}\left(1 + O(\lambda^{-\frac{1}{m}})\right)$, *para* $\lambda \to \infty$*;*

iii. $\lambda_j \sim V(1)^{-\frac{m}{n}}\ j^{\frac{m}{n}}$, *para* $j \to \infty$*;*

Demonstração: Teoremas 15.2 e 16.1 em [25]. ■

1.3.1 Caracterização dos Espaços $\mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$ e $C^\infty(\mathbb{T} \times M)$

Como mencionado no início desta seção, nosso objetivo é estabelecer condições necessárias e suficientes para se determinar quando uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$ provém de uma função suave. Para isso, defina a Série de Fourier

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j(t)\varphi_j(x), \quad \text{sendo} \quad u_j(t) = < u, \overline{\varphi_j} dx > .$$

O teorema abaixo fornece tais condições.

Teorema 1.10 *Para a série*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(t)\varphi_j(x), \tag{1.8}$$

com coeficientes $c_j(t) \in C^\infty(\mathbb{T})$, as seguintes afirmações são equivalentes:

i. A série (1.8) converge na topologia de $C^\infty(\mathbb{T}\times M)$;

ii. A série (1.8) é a série de Fourier de alguma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$;

iii. Fixado $k \in \mathbb{N}_0$, obtemos para todo $N > 0$ que

$$\max_{t\in\mathbb{T}} |\partial_t^k c_j(t)| = O(\lambda_j^{-N}), \ \ \textit{para } j \to \infty,$$

ou equivalentemente

$$\max_{t\in\mathbb{T}} |\partial_t^k c_j(t)| = O(j^{-N}), \ \ \textit{para } j \to \infty. \tag{1.9}$$

Além disso, temos a equivalência das seguintes afirmações:

iv. A série (1.8) converge na topologia de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$;

v. A série (1.8) é a série de Fourier de alguma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$;

vi. Existe algum número real N_0 satisfazendo (1.9);

Observação 1.2 *Se $A(t,x,D_x)$ e $B(t,x,D_x)$ são os operadores dados em* (0.1)*, na introdução deste trabalho, para os quais vale a separação de variáveis* (0.3)*, então*

$$\begin{aligned} A(t,x,D_x)\cdot u = a(t)\otimes p(x,D_x)\cdot u &= \sum_{j\in\mathbb{N}} a(t)\otimes p(x,D_x)\cdot\big(u_j(t)\varphi_j(x)\big) \\ &= a(t)\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j(t)p(x,D_x)\cdot\varphi_j(x) \end{aligned}$$

e analogamente

$$B(t,x,D_x)\cdot u = b(t)\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j(t)q(x,D_x)\cdot\varphi_j(x).$$

Assim, escrevemos (por abuso de notação)

$$p(x,D_x)\cdot u \doteq \mathbb{1}\otimes p(x,D_x)\cdot u \quad e \quad q(x,D_x)\cdot u \doteq \mathbb{1}\otimes q(x,D_x)\cdot u,$$

e deste modo tem-se

$$A(t,x,D_x)\cdot u = a(t)p(x,D_x)\cdot u \quad e \quad B(t,x,D_x)\cdot u = b(t)q(x,D_x)\cdot u.$$

1.3.2 Caracterização dos Espaços de Sobolev $\mathscr{H}^s(M)$

Nesta subseção aplicamos as mesmas ideias anteriores para se caracterizar os espaços das distribuições $\mathscr{D}'(M)$, das funções $C^\infty(M)$ e os Sobolev $\mathscr{H}^s(M)$, para cada $s\in\mathbb{R}$.

Primeiramente, dada uma $u\in\mathscr{D}'(M)$, defina

$$u=\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j\varphi_j(x), \quad \text{sendo} \quad u_j = < u, \overline{\varphi_j} dx > .$$

Note então que

$$C^\infty(M)=\bigcap_{s\in\mathbb{R}}\mathscr{H}^s(M) \;\text{ e }\; \mathscr{D}'(M)=\bigcup_{s\in\mathbb{R}}\mathscr{H}^s(M).$$

Assim, segue da proposição 10.2, em [25], combinada com a fórmula de Weyl o seguinte resultado:

Teorema 1.11 *Para a série*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j\varphi_j(x), \tag{1.10}$$

com coeficientes complexos c_j, as seguintes afirmações são equivalentes:

i. A série (1.10) converge na topologia de $C^\infty(M)$;

ii. A série (1.10) é a série de Fourier de alguma função $f\in C^\infty(M)$;

iii. Para todo $N>0$ temos

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2 j^{-N} < +\infty. \tag{1.11}$$

Além disso, temos a equivalência das seguintes afirmações:

iv. A série (1.10) converge na topologia de $\mathscr{D}'(M)$;

v. A série (1.10) é a série de Fourier de alguma distribuição $u\in\mathscr{D}'(M)$;

vi. Existe algum número real N satisfazendo (1.11);

Uma consequência deste resultado é a seguinte caracterização do espaço de Sobolev $\mathscr{H}^s(M)$:

Teorema 1.12 *Seja $E\in\mathscr{E}^m(M)$ um operador normal. Então para cada $s\geqslant 0$ temos:*

i. *A aplicação linear $E^{s/m}:\mathscr{H}^s(M)\to L^2(M)$ é contínua;*

ii. *Se* $0 \notin \sigma(E)$*, então a seguinte expressão*

$$||u||_{\mathscr{H}^s(M)} = ||E^{\frac{s}{m}} u||_{L^2(M)}$$

define uma norma equivalente em $\mathscr{H}^s(M)$*. Além disso,*

$$u \in \mathscr{H}^s(M) \Longleftrightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j|^2 \lambda_j^{\frac{2s}{m}} < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j|^2 j^{\frac{2s}{n}} < +\infty. \tag{1.12}$$

Demonstração: Ver teorema 1.1, referência [9]. ■

Capítulo 2

Hipoelitícidade Global e Separação de Variáveis

Neste capítulo exibimos os principais resultados obtidos neste trabalho, os quais descrevem a hipoeliticide global do operador $L = D_t + C(t,x,D_x)$ no caso em que existe separação de variáveis, ou seja,

$$L = D_t + a(t)p(x,D_x) + i\,b(t)q(x,D_x), \quad (t,x) \in \mathbb{T} \times M, \tag{2.1}$$

sendo $a, b \in C^{\infty}(\mathbb{T})$ com médias

$$a_0 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} a(s)ds, \quad b_0 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} b(s)ds$$

e $p(x,D_x)$, $q(x,D_x)$ operadores auto-adjuntos pertencentes a $\Psi^1(M)$, os quais comutam entre si e também com um operador elíptico $E(x,D_x) \in \mathscr{E}^m(M)$, isto é,

$$[p(x,D_x), q(x,D_x)] = 0, \tag{2.2}$$

$$[E, p(x,D_x)] = 0 \ \text{ e } \ [E, q(x,D_x)] = 0. \tag{2.3}$$

Mostramos inicialmente que através das hipóteses (2.2) e (2.3) podemos restringir nosso estudo ao caso em que todos os autovalores de $E(x,D_x)$ são simples, ou seja, quando

$$\dim E_{\lambda_j} = 1, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Para tanto, seguimos a notação dos trabalhos [6, 7, 12] reescrevemos o espectro de $E(x,D_x)$ sem contar suas multiplicidades como

$$spec(E) = \{0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots \sigma_j < \ldots \to +\infty\}, \ \text{mult}(\sigma_j) = d_j, \ j \in N \tag{2.4}$$

e denotamos por

$$\left\{e_k^j(x)\right\}_{j\in\mathbb{N}}^{k\in\{1,2,\dots,d_j\}}$$

uma base ortonormal de $L^2(M)$ associada a (2.4).

Assim, cada auto-espaço E_{σ_j} possui dimensão d_j e

$$L^2(M)=\bigoplus_{j=1}^{\infty}E_{\sigma_j},\ \ E_{\sigma_j}=\text{span}\ \left\{e_k^j\right\}_{k=1}^{d_j},\ j\in\mathbb{N}.$$

Dessa forma, cada distribuição $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ pode ser escrita como

$$u=\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{m_j}u_k^j(t)e_k^j(x),$$

logo as conclusões do teorema 1.10 são válidas se a sequência $\left\{u_\ell^j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisfaz a estimativa (1.9), para cada $\ell\in\{1,\dots,d_j\}$.

Segue da hipótese (2.3) que $p(E_{\lambda_j})\subset E_{\lambda_j}$ e $q(E_{\lambda_j})\subset E_{\lambda_j}$, para cada $j\in\mathbb{N}$, portanto podemos considerar as restrições

$$p_j(x,D_x):E_{\sigma_j}\longrightarrow E_{\sigma_j}\ \text{ e }\ q_j(x,D_x):E_{\sigma_j}\longrightarrow E_{\sigma_j}.$$

Dessa forma, para cada $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ obtemos

$$p(x,D_x)u=\sum_{j\in\mathbb{N}}\left\langle P_j\cdot U_j(t),e_j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}},$$
$$q(x,D_x)u=\sum_{j\in\mathbb{N}}\left\langle Q_j\cdot U_j(t),e_j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}},$$

em que $P_j,Q_j\in\mathbb{C}^{d_j\times d_j}$ são determinadas pela base ortonormal $\left\{e_k^j\right\}_{k=1}^{d_j}$, com

$$U_j(t)=\left(u_k^j(t)\right)_{d_j\times1},\ \text{ e }\ e_j=\left(e_k^j(x)\right)_{d_j\times1},\ \text{ para cada }\ j\in\mathbb{N}.$$

Portanto, $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ é solução da equação $Lu=f$ se, e somente se, cada $U_j(t)$ é solução do sistema de equação diferencial

$$D_tU_j(t)+C_j(t)\cdot U_j(t)=F_j(t),\ t\in\mathbb{T},\tag{2.5}$$

para cada $j\in\mathbb{N}$, sendo

$$C_j(t)=a(t)P_j+ib(t)Q_j\ \text{ e }\ F_j(t)=\left(f_{j,\ell}(t)\right)_{d_j\times1}.$$

Neste ponto convém relembrar o seguinte resultado de álgebra linear:

Lema 2.1 *Seja $\{T_\alpha : V \to V, \alpha \in \Lambda\}$ uma família de operadores lineares definidos num espaço vetorial de dimensão finita V, tais que $[T_\alpha, T_\beta] = 0, \forall \alpha, \beta \in \Lambda$. Então, existe uma matriz unitária S satisfazendo*

$$S^* \cdot [T_\alpha] \cdot S = D_{T_\alpha},\ \forall\ \alpha \in \Lambda,$$

sendo D_{T_α} a matriz diagonal dos autovalores de T_α.

Note agora que

$$[p(x, D_x), q(x, D_x)] = 0 \iff [P_j, Q_j] = 0,\ \forall\, j \in \mathbb{N},$$

por outro lado, $P_j^* = P_j$ e $Q_j^* = Q_j$, logo para cada $j \in \mathbb{N}$ a família $\{P_j, Q_j\}$ satisfaz as condições do lema 2.1, então existe uma base ordenada de E_{σ_j} tal que

$$S_j^* \cdot P_j \cdot S_j = D_{P_j} \ \text{ e } \ S_j^* \cdot Q_j \cdot S_j = D_{Q_j},$$

em que cada S_j é uma matriz unitária,

$$D_{P_j} = \operatorname{diag}\Big(\mu_{j,1}, \dots, \mu_{j,d_j}\Big) \ \text{ e } \ D_{Q_j} = \operatorname{diag}\Big(\nu_{j,1}, \dots, \nu_{j,d_j}\Big).$$

Escrevendo

$$V_j(t) \doteq S_j^* \cdot U_j(t) \ \text{ e } \ G_j(t) \doteq S_j^* \cdot F_j(t), \tag{2.6}$$

a sequência de sistemas (2.5) pode ser reescrita como

$$D_t V_j(t) + C_j(t) \cdot V_j(t) = G_j(t),\ j \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

com $C_j(t) = a(t) D_{P_j} + i\, b(t) D_{Q_j}$.

Observe agora que o estudo do comportamento das soluções U_j, quando $j \to \infty$, é equivalente ao estudo das soluções V_j. De fato, sendo S_j uma matriz unitária, segue que

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_t^k V_j(t)\right\|^2_{\mathbb{C}^{d_j}} &= \left\|S_j^* \cdot \partial_t^k U_j(t)\right\|^2_{\mathbb{C}^{d_j}} \\
&= \Big\langle S_j \cdot S_j^* \cdot \partial_t^k U_j(t), \partial_t^k U_j(t)\Big\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}} \\
&= ||\partial_t^k U_j(t)||^2_{\mathbb{C}^{d_j}}.
\end{aligned}$$

Em particular, quando $f \in C^\infty(\mathbb{T} \times M)$, ambas sequências $\{F_j(t)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{G_j(t)\}_{j\in\mathbb{N}}$ em (2.6) satisfazem a condição (1.9).

Daqui segue que (2.7) equivale a

$$D_t v_\ell^j(t) + c_\ell^j(t) v_\ell^j(t) = g_\ell^j(t),\ j \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

com $c_\ell^j(t) = a(t)\mu_\ell^j + i\, b(t)\nu_\ell^j$, para cada $\ell \in \{1, \dots, d_j\}$.

Assim, se as soluções $V_j(t)$ de (2.7) satisfazem uma estimativa do tipo

$$\left\|\partial_t^k V_j(t)\right\|^2_{\mathbb{C}^{d_j}} \leqslant C j^N,\ j\to\infty,$$

então cada $v^j_\ell(t)$ também a satisfaz, sendo a recíproca também verdadeira.

Portanto, o estudo da hipoeliticidade global do operador L se reduz ao estudo das soluções das equações (2.8). Neste sentido, basta considerar o caso em que todos os autovalores são simples.

Observação 2.1 *Note que para se obter o sistema diagonal* (2.7) *é necessário utilizar o lema 2.1, o qual por sua vez exige que as matrizes P_j e Q_j comutem para cada $j\in\mathbb{N}$, ou seja, neste ponto do trabalho fica em evidência a importância da hipótese de comutatividade*

$$[p(x,D_x),q(x,D_x)]=0.$$

Quando essa comutatividade falha o estudo da hipoeliticidade do operador L fica mais complicado, de modo que não se obtém o enunciado geral que é apresentado na próxima seção. Além disso, a redução à forma normal (apresentada no capítulo 3) também depende da comutatividade dos operadores p e q, no caso em que os autovalores do operador E não são simples.

Para ilustrar as complicações que surgem na ausência desta hipótese discutimos um exemplo na seção 5.2, página 55.

2.1 Teorema Principal

Em virtude das discussões da seção anterior vamos supor que o operador elíptico $E\in\mathscr{E}^m(M)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

($\mathscr{A}$) $[E,p(x,D)]=0$ e $[E,q(x,D)]=0$;

($\mathscr{B}$) Para cada $j\in\mathbb{N}$, o auto-espaço E_{λ_j} tem dimensão 1;

Da propriedade $\mathscr{A}$ segue que $p(x,D)$ e $q(x,D)$ são invariantes sobre os auto-espaços E_{λ_j}, por outro lado, da hipótese $\mathscr{B}$, obtêm-se duas sequências reais $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, tais que

$$p(x,D)\varphi_j=\mu_j\varphi_j \quad \text{e} \quad q(x,D)\varphi_j=\nu_j\varphi_j. \tag{2.9}$$

Dessa forma, a equação $Lu=f$ é equivalente a sequência de equações diferenciais

$$D_t u_j(t)+c_j(t)u_j(t)=f_j(t),\ \ t\in\mathbb{T},\ \ j\in\mathbb{N}, \tag{2.10}$$

sendo $c_j(t)=a(t)\mu_j+ib(t)\nu_j$.

A seguinte proposição descreve a técnica que utilizamos no estudo da hipoeliticidade global do operador L.

Proposição 2.2 *Suponha que o operador L, dado em* (2.1)*, satisfaça as condições $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Então L é (GH) se, e somente se, a sequência de soluções das equações* (2.10) *satisfaz a seguinte propriedade: dado $k \in \mathbb{N}_0$, obtém-se para todo $N > 0$ uma constante positiva C e um $j_0 \in \mathbb{N}$, tais que*

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant C\ j^{-N},\ \forall\, t \in \mathbb{T},\ \forall\, j \geqslant j_0. \tag{2.11}$$

O comportamento das sequências $\{\mu_j\}$ e $\{\nu_j\}$, quando $j \to \infty$, é determinante para se investigar as soluções das equações (2.10), logo este comportamento é também importante no estudo da hipoeliticidade do operador L.

Definição 2.1 *Dado um número real α, o conjunto*

$$\Gamma_\alpha = \{ j \in \mathbb{N};\ \mu_j \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

é chamado de conjunto das ressonâncias de α, com respeito a sequência $\{\mu_j\}$.

Definição 2.2 *Diremos que um número real α é não-Liouville, com respeito a sequência $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se existem $C > 0$, $R \gg 1$ e $\delta \geqslant 0$ tais que*

$$\inf_{\ell \in \mathbb{Z}} |\alpha\mu_j + \ell| \geqslant C\ j^{-\delta},\ \forall\, j \geqslant R. \tag{2.12}$$

Se (2.12) *não é satisfeita, dizemos que α é Liouville, com respeito a sequência $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Por simplicidade, utilizamos por vezes as expressões "μ_j-não-Liouville" e "μ_j-Liouville".*

Assim, estamos em condições de enunciar precisamente os resultados exibidos na introdução deste texto, cujas demonstrações são exibidas no capítulo 4.

Teorema 2.3 (Teorema Principal) *Seja L o operador* (2.1)*. Suponha que sejam válidas as hipóteses $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ e que a sequência $\{\nu_j\}$, dada em* (2.9)*, satisfaça a seguinte condição*

$$\lim_{j\to\infty} |\nu_j| = \infty.$$

Assim:

i. se $b \equiv 0$, então L é (GH) se, e somente se, o conjunto Γ_{a_0} é finito e a_0 é μ_j-não-Liouville.

ii. se $b \not\equiv 0$ e b não muda de sinal, então L é (GH);

iii. se b muda de sinal e $\{\nu_j\}$ tem crescimento super-logarítmico, isto é, existe uma subsequência $\{\nu_{j_k}\}_k$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\nu_{j_k}|}{\log(j_k)} = +\infty,$$

então L não é (GH);

iv. *se $\{\nu_j\}$ tem crescimento no máximo logarítmico, ou seja,*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{|\nu_j|}{\log(j)} = \kappa < +\infty, \tag{2.13}$$

então L é (GH) se $b_0 \neq 0$. Quando for $b_0 = 0$, então L é (GH) se, e somente se, Γ_{a_0} é finito e a_0 é não-Liouville com respeito a μ_j;

2.2 Crescimento Logarítmico e Espaços de Sobolev

Nesta seção fazemos um paralelo entre os resultados do Teorema 2.3 e àqueles obtidos por Hounie, em [15]. Primeiramente introduzimos algumas notações e definições presentes em [15].

Seja A um operador linear auto-adjunto, densamente definido num espaço de Hilbert complexo $\mathscr{H}$, não limitado, positivo e com inversa contínua A^{-1}.

Seja $\mathscr{H}_A^s$ a escala de espaços de Sobolev definida por A e ponha

$$\mathscr{H}_A^{\infty} = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}_A^s \quad \text{e} \quad \mathscr{H}_A^{-\infty} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}_A^s. \tag{2.14}$$

Fixada uma função $c(t) = a(t) + i\,b(t) \in C^{\infty}(\mathbb{T})$ considere o operador

$$\mathscr{L} = D_t + c(t)A, \quad t \in \mathbb{T},$$

e sejam a_0 e b_0 as médias de $a(t)$ e $b(t)$ em $\mathbb{T}$, respectivamente.

Definição 2.3 *O operador $\mathscr{L}$ é dito globalmente hipoelítico em $\mathbb{T}$, e denota-se por $\mathscr{H}_A^{\infty}-$(GH), se vale*

$$\begin{cases} u \in C^{\infty}(\mathbb{T};\, \mathscr{H}_A^{-\infty}) \\ \mathscr{L}\,u \in C^{\infty}(\mathbb{T};\, \mathscr{H}_A^{\infty}) \end{cases} \Longrightarrow u \in C^{\infty}(\mathbb{T};\, \mathscr{H}_A^{\infty}).$$

Seja $spec(A)$ o espectro de A e $\tau > 0$ satisfazendo $spec(A) \subset [\tau, \infty)$. Considere ainda as funções

$$r(z) = z(b_0 - i\,a_0), \quad \text{e} \quad d(\xi) = \inf_{z\in\Gamma} |\xi - z|, \;\; \xi \in \mathbb{R},$$

sendo $\Gamma = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geqslant \tau \quad \text{e} \quad r(z) \in \mathbb{Z}\}$.

Nestas condições, tem-se:

Teorema 2.4 *O operador $\mathscr{L}$ é $\mathscr{H}_A^{\infty}-$(GH) se, e somente se, valem as seguintes condições:*

(a) *b não muda de sinal;*

(b) *se $b \equiv 0$, existem $c > 0$ e $\delta \in \mathbb{N}$, tais que $d(\xi) \geqslant c\,\xi^{-\delta}$, para todo $\xi \in spec(A)$ suficientemente grande.*

Demonstração: Ver teorema 2.1, em[15].

■

Em particular, considerando $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_t \times \mathbb{T}_x$ e A como a extensão de D_x em $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{T}_x)$, então o operador $(I + A^2)^{1/2}$ define a escala usual de Sobolev em $\mathbb{T}_x$.

Assim obtemos $\mathscr{H}^{\infty}(\mathbb{T}) = C^{\infty}(\mathbb{T})$ e $\mathscr{H}^{-\infty} = \mathscr{D}'(\mathbb{T})$, portanto

$$C^{\infty}(\mathbb{T}_t;\, \mathscr{H}_A^{-\infty}) = \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2) \quad \text{e} \quad C^{\infty}(\mathbb{T}_t;\, \mathscr{H}_A^{\infty}) = C^{\infty}(\mathbb{T}^2).$$

Nestas condições a definição 2.3 equivale a:

Definição 2.4 *O operador $\mathscr{L}$ é dito $C^{\infty}-$globalmente hipoelítico, ou apenas $C^{\infty}-(GH)$, se vale*

$$\begin{cases} u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2) \\ \mathscr{L}u \in C^{\infty}(\mathbb{T}^2) \end{cases} \Longrightarrow u \in C^{\infty}(\mathbb{T}^2).$$

Assim, segue do Teorema 2.4, o seguinte resultado:

Teorema 2.5 *Seja o operador diferencial*

$$\mathscr{L}_D = D_t + c(t)D_x,\ (t, x) \in \mathbb{T}^2.$$

Então:

i. Se $b \not\equiv 0$, $\mathscr{L}_D$ é $C^{\infty}-(GH)$ se, e somente se, b não muda de sinal;

ii. Se $b \equiv 0$, $\mathscr{L}_D$ é $C^{\infty}-(GH)$ se, e somente se, a_0 é um irracional não-Liouville;

Demonstração: Ver teorema 2.2, em[15].

■

Para comparar os resultados obtidos por Hounie com o nosso teorema principal considere o seguinte operador

$$L_\rho = D_t + a(t)D_x + i\,b(t)\log^{\rho}(2 + |D_x|), \quad (t, x) \in \mathbb{T}_t \times \mathbb{T}_x, \tag{2.15}$$

sendo $\rho > 0$ fixado. Observe que no caso $b \not\equiv 0$ o teorema 2.3 afirma o seguinte:

$i.$ se $\rho > 1$, o operador L_ρ é $C^{\infty}-$(GH) se, e somente se, $b(t)$ não muda de sinal;

$ii.$ se $\rho \leqslant 1$, o operador L_ρ é $C^{\infty}-$(GH) se, e somente se, $b_0 \neq 0$, ou $b_0 = 0$ e a_0 é um número irracional não-Liouville;

Note que se $\rho > 1$, então a sequência $\{\nu_j = \log^{\rho}(2 + j)\}$ é super-logarítmica e nossos resultados coincidem com os obtidos no teorema 2.5. O mesmo ocorre se $b \equiv 0$.

Entretanto, se for $a \equiv 0$, $b \not\equiv 0$ e $0 < \rho \leqslant 1$, tem-se o operador

$$\widetilde{L}_{\rho} = D_t + i\,b(t)\log^{\rho}(2+|D_x|), \quad (t,x) \in \mathbb{T}\times\mathbb{T}, \tag{2.16}$$

e o resultado abstrato de Hounie em [15] não é aplicável para o estudo da $C^{\infty}-$(GH).

De fato, seja $\mathscr{H}^{\epsilon}(\mathbb{T})$ o espaço de Sobolev usual, de ordem $\epsilon \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathscr{H}^{\epsilon}(\mathbb{T}) = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T});\ \xi^{\epsilon}\,\widehat{u}(\xi) \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

e seja o operador

$$Q(x,D_x) = \log^{\rho}(2+|D_x|),\ x \in \mathbb{T}_x.$$

Seguindo as ideias de [15], definimos a escala de Sobolev $\mathscr{H}_Q^s$ associada a Q por

$$\mathscr{H}_Q^s = \{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}); \widehat{u}(\xi)\log^{\rho s}(2+|\xi|) \in \ell^2(\mathbb{Z})\},\ s \in \mathbb{R},$$

e de (2.14), temos que

$$\mathscr{H}_Q^{\infty} = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}_Q^s \quad \text{e} \quad \mathscr{H}_Q^{-\infty} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}_Q^s.$$

O próximo resultado fornece a ferramenta principal para as comparações propostas nesta seção.

Proposição 2.6 $\mathscr{H}_Q^{\infty}(\mathbb{T}) \neq C^{\infty}(\mathbb{T})$.

Demonstração: Mostraremos que para $\varepsilon > 0$, $\mathscr{H}_Q^{\infty}(\mathbb{T}) \not\subset \mathscr{H}^{\varepsilon}(\mathbb{T})$. Para tanto, seja $\theta > 1/2$ e defina

$$\psi(\xi) = |\xi|^{-1/2}\log^{-\theta}(|\xi|),\ \xi \in \mathbb{Z},\ |\xi| \gg 1.$$

Note que

$$\int_{|\xi|\geqslant R} \frac{1}{|\xi|\log^{2\theta}(|\xi|)}\,d\xi \sim \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho\log^{2\theta}\rho}\,d\rho = \frac{1}{(2\theta-1)\ln^{2\theta-1}(R)} < +\infty,$$

portanto $\{\psi(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Agora, fixado $\delta \in (0,1)$, defina

$$\widehat{u}(\xi) = \begin{cases} \psi(\xi)e^{-\log^{\delta}(|\xi|)\log(\log(|\xi|))} & \text{se } \xi \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ 0, \quad \text{se } \xi = 0. \end{cases}$$

Dado $s > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \log^{s\rho}(|\xi|)\widehat{u}(\xi) =& \psi(\xi)e^{\rho\, s\log(\log|\xi|) - \log^{\delta}(|\xi|)\log(\log|\xi|))} \\ =& \psi(\xi)e^{-(\log^{\delta}(|\xi|)-\rho\, s)\log(\log|\xi|)}, \quad |\xi| \gg 1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para cada $N > 0$ podemos obter $R = R(N, \rho s) > 0$ tais que

$$N < \log^{\delta}(|\xi|) - \rho s, \; |\xi| \geqslant R,$$

logo, $\forall |\xi| \geqslant R$ tem-se

$$e^{-(\log^{\delta}(|\xi|)-\rho s)\log(\log|\xi|)} \leqslant e^{-N\log(\log|\xi|)} = (\log|\xi|)^{-N}.$$

Assim, segue de (2.17) que

$$\log^{s\rho}(|\xi|)\widehat{u}(\xi) \leqslant \psi(\xi)(\log|\xi|)^{-N} \leq \psi(\xi), \;\; |\xi| \geq R,$$

e portanto $\{\widehat{u}(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}}$ define uma distribuição $u \in \mathscr{H}^{\infty}_{Q}(\mathbb{T})$.

Uma vez que $\delta < 1$, obtém-se

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{\log^{\delta}(|\xi|)\log(\log|\xi|)}{\log(|\xi|)} = 0,$$

então para cada $\varepsilon > 0$, existe $R' > 0$ tal que

$$\log^{\delta}(|\xi|)\log(\log|\xi|) \leqslant \varepsilon/2\log(|\xi|), \; \forall |\xi| \geqslant R'.$$

Logo, para $|\xi| \geqslant R'$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\xi|^{\varepsilon}\,\widehat{u}(\xi) &= \psi(\xi)|\xi|^{\varepsilon}\,e^{-\log^{\delta}(|\xi|)\log(\log(|\xi|)))} \\
&= \psi(\xi)e^{\varepsilon\log(|\xi|)-\log^{\delta}(|\xi|)\log(\log(|\xi|))} \\
&\geqslant \psi(\xi)e^{\varepsilon\log(|\xi|)-\varepsilon/2\log(|\xi|)} \\
&= \psi(\xi)e^{\varepsilon/2\log|\xi|} \\
&= |\xi|^{-n/2+\varepsilon/2}\log^{-\theta}(|\xi|).
\end{aligned}$$

Como $\{|\xi|^{-1/2+\varepsilon/2}\log^{-\theta}(|\xi|)\}_{\xi\in\mathbb{Z}} \notin \ell^2(\mathbb{Z})$, segue que

$$\{|\xi|^{\varepsilon}\,\widehat{u}(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{Z}} \notin \ell^2(\mathbb{Z}),$$

e assim $\mathscr{H}^{\infty}_{Q}(\mathbb{T}) \not\subset \mathscr{H}^{\varepsilon}(\mathbb{T})$.

■

Segue então da proposição 2.6 que os espaços $C^{\infty}(\mathbb{T}_t; \mathscr{H}^{\infty}_{Q}(\mathbb{T}))$ e $C^{\infty}(\mathbb{T}^2)$ não coincidem, logo através dos resultados obtidos por Hounie não é possível estudar a $C^{\infty}-$hipoeliticidade do operador $\widetilde{L}_{\rho}$, quando tem-se $\rho \leqslant 1$.

Capítulo 3

Redução à Forma Normal

Neste capítulo mostramos que se a sequência $\{\nu_j\}$ tem crescimento no máximo logarítmico então a hipoeliticidade global do operador

$$L = D_t + a(t)p(x, D_x) + i\,b(t)q(x, D_x)$$

equivale a hipoeliticidade de um operador com coeficientes constantes.

De modo preciso, provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Suponha que $\{\nu_j\}$ satisfaça a condição*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{|\nu_j|}{\log(j)} = \kappa < +\infty. \tag{3.1}$$

Então L é (GH) se, e somente se, é (GH) o operador

$$L_{a_0,b_0} = D_t + a_0 p(x, D) + i\,b_0 q(x, D).$$

A redução à forma normal da parte real $a(t)$ do operador L é sempre possível e bastante difundida na literatura de equações diferenciais e de sistemas dinâmicos, através da conjugação por um "fator integrante periódico".

A novidade que temos nesse trabalho é a possibilidade de se obter o mesmo tipo de redução para a parte imaginária $b(t)$ de L, mediante a a condição (3.1). (Obviamente tal hipótese não é satisfeita por operadores diferenciais.)

Note que combinando o teorema 3.1 com os itens *i* e *ii* do teorema principal obtemos o item *iv*, assim através da redução à forma normal podemos garantir a existência de operadores globalmente hipoelíticos, da forma L, cuja parte imaginária b muda de sinal.

A ideia para se obter a equivalência da hipoeliticidade global entre L e L_{a_0,b_0}, proposta pelo teorema

3.1, é construir um automorfismo Ψ no espaço $C^{\infty}(\mathbb{T}\times M)$ que conjugue tais operadores, ou seja,

$$\Psi^{-1}\circ L\circ\Psi = L_{a_0,b_0}. \tag{3.2}$$

Para tanto, dada uma distribuição $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, defina o elemento

$$\Psi_{a,b}\cdot u \doteq \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{\nu_j(B(t)-b_0t)-i\mu_j(A(t)-a_0t)}u_j(t)\varphi_j(x),$$

sendo $A(t)$ e $B(t)$ as primitivas

$$A(t)=\int_0^t a(s)ds \;\text{ e }\; B(t)=\int_0^t b(s)ds.$$

Assim, o teorema 3.1 segue da seguinte proposição:

Proposição 3.2 *Se $\{\nu_j\}$ satisfaz a condição* (3.1)*, então $\Psi_{a,b}$ é um automorfismo dos espaços $\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ e $C^{\infty}(\mathbb{T}\times M)$. Além disso, $\Psi_{a,b}$ satisfaz* (3.2).

A demonstração da proposição 3.2 é dividida em duas etapas. Primeiramente, fazemos a redução na parte imaginária do operador. Em seguida faz-se a parte real, mais simples e que segue as mesmas ideias do primeiro caso. Por fim, mostramos essas reduções no caso em que os auto-espaços do operador elíptico E são multidimensionais, supondo válida a comutatividade $[p(x,D),q(x,D)]=0$.

Para obter tais resultados utilizamos a seguinte proposição.

Proposição 3.3 *$|\mu_j|=O(j^{1/n})$ e $|\nu_j|=O(j^{1/n})$, quando $j\to\infty$.*

Demonstração: Primeiramente, note que se uma sequência de números complexos $\omega=\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisfaz a seguinte propriedade: para toda sequência $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|^2 j^{2/n}<\infty \implies \sum_{j\in\mathbb{N}}|\omega_j|^2|u_j|^2 j^{2/n}<\infty,$$

então ω é uma sequência limitada.

De fato, se ω é ilimitada, então existe uma subsequência $\{\omega_{j_k}\}_k$ tal que

$$|\omega_{j_k}|>2^{k/2},\;\; j_1<j_2<\ldots<j_k\to\infty.$$

Note então que a sequência

$$u_j=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{k/2}j_k^{1/n}}, & \text{se } j=j_k\\ 0, & \text{se } j\neq j_k.\end{cases}$$

satisfaz $\sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|^2j^{2/n}<\infty$, porém $\sum_{j\in\mathbb{N}}|\omega_j|^2|u_j|^2j^{2/n}=\infty$, uma contradição.

Retornando para a demonstração da proposição 3.3, observe que do teorema 1.12 tém-se

$$u \in H^1(M) \Longleftrightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j|^2 j^{2/n} < +\infty.$$

Por outro lado, $p(x,D)$ é uma aplicação linear e contínua de $\mathscr{H}^1(M)$ para $\mathscr{H}^0(M)$, logo

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j|^2 j^{2/n} < +\infty \Longrightarrow p(x,D)u \in \mathscr{H}^0(M) = L^2(M)$$

$$\Longrightarrow \|p(x,D)u\|^2_{L^2(M)} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{\mu_j^2}{j^{2/n}} \cdot (|u_j|^2 \cdot j^{2/n}) \right)$$

Portanto, $|\mu_j| j^{-1/n}$ é limitada, assim $|\mu_j| = \mathrm{O}(j^{1/n})$ para $j \to \infty$.

■

3.1 Redução da Parte Imaginária

Para cada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ defina a aplicação

$$u \longmapsto \Psi_b \cdot u \doteq \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{(B(t)-b_0 t)\nu_j} u_j(t)\varphi_j(x).$$

Note que se $\Psi_b \cdot u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, para cada u, então Ψ_b é evidentemente linear com inversa

$$u \longmapsto \Psi_b^{-1} \cdot u \doteq \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-(B(t)-b_0 t)\nu_j} u_j(t)\varphi_j(x).$$

Proposição 3.4 *Se* $\{\nu_j\}$ *satisfaz* (2.13)*, então* Ψ_b *é um automorfismo de* $\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$.

Demonstração: Provar que $\Psi_b \cdot u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, para cada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, é equivalente a mostrar que a sequência de funções

$$\psi_j(t) = e^{(B(t)-b_0 t)\nu_j} u_j(t)$$

satisfaz a condição (1.9) do teorema 1.10, para alguma constante N, isto é,

$$|\partial_t^k \psi_j(t)| \leqslant C\, j^N,\ j \to \infty. \tag{3.3}$$

No que segue vamos considerar a seguinte função auxiliar

$$\mathscr{B}(t) = B(t) - b_0 t + \tau,$$

em que $\tau \in \mathbb{R}$ será escolhido adiante.

Segue agora da proposição 3.3 e por indução em k que existem constantes $C'>0$ e $j_0\in\mathbb{N}$, tais que

$$|\partial_t^k e^{\mathscr{B}(t)\nu_j}|\leqslant C'\ j^{k/n}\ e^{\mathscr{B}(t)\nu_j},\ \forall\, j\geqslant j_0.$$

para cada $k\in\mathbb{N}_0$. Fixada $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, segue do teorema 1.10 e da fórmula de Leibnitz a existência de constantes N_0, $C''>0$ e $j_1\in\mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^k\psi_j(t)| &\leqslant \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}|\partial_t^\ell e^{\mathscr{B}(t)\nu_j}\ \partial_t^{k-\ell}u_j(t)|\\
&\leqslant \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}C'\ j^{\ell/n}\ e^{\mathscr{B}(t)\nu_j}\ C''\ j^{N_0}\\
&\leqslant C\ j^{N_1}\ e^{\mathscr{B}(t)\nu_j},\ j\geqslant j_1, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

sendo $N_1=N_0+k/n$.

Observe que a hipótese (3.1) é equivale a seguinte afirmação: para todo $\varepsilon>0$, existe $j_2\in\mathbb{N}$ tais que

$$|\nu_j|\leqslant\log(j^{\kappa+\varepsilon}),\ \forall\, j\geqslant j_2. \qquad (3.5)$$

Sejam $\delta=\max\{\mathscr{B}(t);t\in[0,2\pi]\}$, $\rho=\min\{\mathscr{B}(t);t\in[0,2\pi]\}$ e escolha $\tau\in\mathbb{R}$ de modo que

$$0<\rho\leqslant\delta.$$

Como $|\nu_j|\to\infty$, podemos supor que existe $j_3\in\mathbb{N}$ tal que $\nu_j>0$, ou que $\nu_j<0$ (a menos da existência de subsequências). Assim, obtemos

$$\rho\,\nu_j\leqslant\mathscr{B}(t)\nu_j\leqslant\delta\,\nu_j,\ j\geqslant j_3,\ \forall\, t\in[0,2\pi],\ \text{ se }\nu_j>0,\ \text{ ou} \qquad (3.6)$$

$$\delta\,\nu_j\leqslant\mathscr{B}(t)\nu_j\leqslant\rho\,\nu_j,\ j\geqslant j_3,\ \forall\, t\in[0,2\pi],\ \text{ se }\nu_j<0. \qquad (3.7)$$

Escolhendo j_0 o maior dentre j_1, j_2 e j_3 obtemos de (3.6) e (3.7) que

$$|\partial_t^k\psi_j(t)|\leqslant C\ j^{N_1}\,\mathscr{B}(t)\leqslant\begin{cases} C\ j^{N_1}e^{\delta\,\nu_j}, & \text{se } \nu_j>0\\ C\ j^{N_1}e^{\rho\,\nu_j}, & \text{se } \nu_j<0\end{cases},\ \forall\, j\geqslant j_0. \qquad (3.8)$$

Observe que no caso $\nu_j<0$ temos $e^{\rho\,\nu_j}\leqslant 1$, quando $j\to\infty$ e portanto Ψ_b está bem definida. Por outro lado, quando $\nu_j>0$, segue de (3.5) e (3.8) que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^k\psi_j(t)| &\leqslant C\ j^{N_1}e^{\delta\,\nu_j}\\
&\leqslant C\ j^{N_1}e^{\delta\log(j^{\kappa+\varepsilon})}\\
&\leqslant C\,j^{N_1+\delta(\kappa+\varepsilon)},\ j\geqslant j_0.
\end{aligned}$$

Então, fixado $\varepsilon > 0$ e definindo

$$N = N_1 + \delta(\kappa + \varepsilon)$$

segue que

$$|\partial_t^k \psi_j(t)| \leqslant C\, j^N, \text{ quando } j \to \infty,$$

e então $\Psi_b \cdot u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$.

■

Corolário 3.5 *Se vale 3.1, então Ψ_b é um automorfismo de $C^\infty(\mathbb{T} \times M)$.*

Demonstração: Se $u \in C^\infty(\mathbb{T} \times M)$, então a expressão (3.4) torna-se

$$|\partial_t^k \psi_j(t)| \leqslant C\ j^{-\eta + k/n}\ e^{\mathscr{B}(t)\nu_j}, \text{ quando } j \to \infty,$$

para todo $\eta > 0$. Então obtemos $|\partial_t^k \psi_j(t)| \leqslant C\, j^{-\eta+N},\ j \to \infty$, implicando $\Psi_b \cdot u \in C^\infty(\mathbb{T} \times M)$.

■

Proposição 3.6 *Considere o operador*

$$L_{b_0} = D_t + a(t)p(x,D) + i\, b_0 q(x,D).$$

Se vale a condição (3.1)*, então:*

i. $Lu = f$ *se, e somente se,* $L_{b_0} v = g$*, sendo* $v = \Psi_b^{-1} \cdot u$ *e* $g = \Psi_b^{-1} \cdot f$*;*

ii. $\Psi_b^{-1} \circ L \circ \Psi_b = L_{b_0}$*;*

iii. L *é (GH) se, e somente se,* L_{b_0} *é (GH);*

Demonstração: Sejam $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$ e $f \doteq Lu$. Definindo $v = \Psi_b^{-1} \cdot u$ e $g = \Psi_b^{-1} \cdot f$, segue que

$$\begin{aligned} L_{b_0} v = & \sum_{j \in \mathbb{N}} \Big\{ \big[D_t(e^{-(B(t)-b_0 t)\nu_j} u_j(t)) \\ & \qquad + a(t)\mu_j e^{-(B(t)-b_0 t)\nu_j} u_j(t) + i\, b_0\, \nu_j\, e^{-(B(t)-b_0 t)\nu_j} u_j(t) \big] \varphi_j(x) \Big\} \\ = & \sum_{j \in \mathbb{N}} \big\{ [D_t u_j(t) + a(t)\mu_j u_j(t) + i\, b(t)\nu_j u_j(t)] e^{-(B(t)-b_0 t)\nu_j} \varphi_j(x) \big\} \\ = & \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(t) e^{-(B(t)-b_0 t)\nu_j} \varphi_j(x)\ =\ \Psi_b^{-1} \cdot f\ =\ g. \end{aligned}$$

A recíproca é similar, logo o item *i.* está provado. Usando a mesmo notação acima tém-se

$$\Psi_b^{-1} \circ L \circ \Psi_b(v) = \Psi_b^{-1} \circ L(u) = \Psi_b^{-1}(L(u)) = \Psi_b^{-1} \cdot f = g = L_{b_0} v,$$

portanto *ii.* também está provado.

Por fim, dado $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$ tal que $g = L_{b_0} v \in C^\infty(\mathbb{T} \times M)$ obtemos que $f = \Psi_b \cdot g$ é uma função suave sobre $\mathbb{T} \times M$, pois Ψ_b é um automorfismo de $C^\infty(\mathbb{T} \times M)$. Por *ii.* temos $Lu = f$, sendo $v = \Psi_b^{-1} \cdot u$. Assim, se L for (GH) devemos ter u suave uma vez que v é suave e L_{b_0} é (GH). A recíproca é demonstrada da mesma forma.

■

3.2 Redução da Parte Real

As ideias para este caso são, em essência, as mesmas que no caso imaginário, entretanto as demonstrações são mais simples uma vez que não é necessário impor nenhuma condição específica sobre as sequências $\{\mu_j\}$ e $\{\nu_j\}$. De fato, esta redução é uma simples extensão de resultados usados por diversos autores em trabalhos como, por exemplo, [2], [4], [12], [14] e [16]. Por esta razão, e pelos passos da demonstração serem idênticos ao caso anterior, omitiremos a prova do seguinte resultado:

Proposição 3.7 *Defina sobre $\mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$ a seguinte aplicação*

$$u \longmapsto \Psi_a \cdot u \doteq \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-i(A(t)-a_0 t)\mu_j} u_j(t) \varphi_j(x).$$

Então

i. *Ψ_a é um automorfismo de $\mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M)$;*

ii. *Ψ_a é um automorfismo de $C^\infty(\mathbb{T} \times M)$;*

iii. *L é (GH) se, e somente se, $L_{a_0} = D_t + a_0 p(x,D) + i b(t) q(x,D)$ é (GH);*

Observação 3.1 *Note que os coeficientes de Fourier*

$$\psi^j_{a,b}(t) = e^{\nu_j(B(t)-b_0 t) - i\mu_j(A(t)-a_0 t)} u_j(t)$$

de $\Psi_{a,b} \cdot u$ satisfazem a estimativa

$$|\partial_t^k \psi_j(t)| \leqslant C' \ j^{k/n} \ e^{(B(t)-b_0 t)\nu_j}, \text{ quando } j \to \infty.$$

Segue então da redução para a parte imaginária que $\Psi_{a,b} \cdot u$ é uma distribuição sobre $\mathbb{T} \times M$. É fácil ver que $\Psi_{a,b}$ comuta os operadores L e L_{a_0,b_0}, logo tém-se a prova da proposição 3.2

3.3 Forma Normal e Auto-espaços Multidimensionais

Mostramos nesta seção como obter um automorfismo dos espaços $\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ e $C^\infty(\mathbb{T}\times M)$ que conjuga os operadores L e L_{a_0,b_0} para o caso $\dim(E_{\lambda_j}) = d_j$.

Seguindo as mesmas notações do capítulo 2, dada uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, escreva

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle u^j(t), e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}},$$

em que

$$u^j(t) = \left(u_j^k(t)\right)_{d_j\times 1}, \ \text{ e } \ e^j = \left(e_j^k(x)\right)_{d_j\times 1}, \ \forall j\in\mathbb{N},$$

sendo $\{e_j^k(x)\}_{k=1}^{d_j}$ uma base de E_{σ_j}. Ainda com respeito a essas bases, considere $P_j, Q_j \in \mathbb{C}^{d_j\times d_j}$ as matrizes das restrições de $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ a cada auto-espaço.

Uma vez que cada P_j e Q_j são auto-adjuntas, podemos definir as sequências reais

$$\{\mu_j\} \doteq \{\mu_1^1,\dots,\mu_1^{d_1},\mu_2^1,\dots,\mu_2^{d_2},\dots,\mu_j^1,\dots,\mu_j^{d_j},\dots\}$$
$$\{\nu_j\} \doteq \{\nu_1^1,\dots,\nu_1^{d_1},\nu_2^1,\dots,\nu_2^{d_2},\dots,\nu_j^1,\dots,\nu_j^{d_j},\dots\}$$

em que $\{\mu_j^l\}_{\ell=1}^{d_j}$ e $\{\nu_j^l\}_{\ell=1}^{d_j}$ são os autovalores de P_j e Q_j, respectivamente.

Para cada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ defina o elemento

$$\Psi_b\cdot u \doteq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle e^{(B(t)-b_0 t)\,Q_j}\cdot u^j(t), e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}}.$$

Observe que se $\Psi_b\cdot u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, então Ψ_b é linear com inversa

$$\Psi_b^{-1}\cdot u \doteq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle e^{-(B(t)-b_0 t)\,Q_j}\cdot u^j(t), e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}}.$$

Proposição 3.8 *Se* $\{\nu_j\}$ *satisfaz* (2.13)*, então* Ψ_b *é um automorfismo dos espaços* $\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ *e* $C^\infty(\mathbb{T}\times M)$.

Demonstração: Observe que $Q_j \sim \operatorname{diag}\left(\nu_j^1,\dots,\nu_j^{d_j}\right)$, logo se $\{e_k^j(x)\}$ indica a base na qual se diagonaliza Q_j, obtém-se

$$\begin{aligned}\Psi_b\cdot u &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle e^{(B(t)-b_0 t)\,D_{Q_j}}\cdot u^j(t), e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}}\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d_j} e^{\nu_j^k(B(t)-b_0 t)} u_j^k(t) e_k^j(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d_j} \psi_j^k(t) e_k^j(x)\end{aligned}$$

sendo $\psi_j^\ell(t) = e^{\nu_j^\ell(B(t)-b_0 t)} u_j^\ell(t)$. Assim, segue do caso unidimensional que cada termo $\psi_j^\ell(t)$ satisfaz as condições necessárias para que se tenha $\Psi_b\cdot u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, ou em $C^\infty(\mathbb{T}\times M)$, caso seja u seja suave.

■

Corolário 3.9 *A aplicação*

$$u \longmapsto \Psi_a \cdot u \doteq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle e^{-i(A(t)-a_0 t)\,Q_j} \cdot u^j(t), e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}} \tag{3.9}$$

define automorfismos em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ *e* $C^\infty(\mathbb{T}\times M)$.

Demonstração: Seja $\{e_j^k(x)\}$ uma base na qual $P_j \sim \operatorname{diag}\left(\mu_j^1,\dots,\mu_j^{d_j}\right)$. Então

$$\Psi_a \cdot u = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{d_j} \psi_j^k(t) e_j^k(x)$$

sendo $\psi_j^\ell(t) = e^{-i\,\nu_j^\ell (A(t)-a_0 t)} u_j^\ell(t)$. Assim a demonstração segue do cado unidimensional. ■

Proposição 3.10 *Considere o operador*

$$L_{b_0} = D_t + a(t)p(x,D) + i\,b_0 q(x,D).$$

Se vale a condição (2.13) *e* $[p(x,D_x), q(x,D_x)] = 0$, *então:*

i. $Lu = f$ *se, e somente se,* $L_{b_0} v = g$, *sendo* $v = \Psi_b^{-1}\cdot u$ *e* $g = \Psi_b^{-1}\cdot f$;

ii. $\Psi_b^{-1} \circ L \circ \Psi_b = L_{b_0}$;

iii. L *é (GH) se, e somente se,* L_{b_0} *é (GH);*

Demonstração: Sejam $u, f \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ tais que $Lu = f$ e defina $v = \Psi_b^{-1}\cdot u$ e $g = \Psi_b^{-1}\cdot f$. Para facilitar a notação, escreva $\mathscr{M}_j(t) = e^{-(B(t)-b_0 t)\,Q_j}$, $j \in \mathbb{N}$.

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
L_{b_0} v &= D_t v + a(t)p(x,D_x)v + i\,b_0 q(x,D_x)v \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle D_t v^j(t) + a(t)P_j v^j(t) + i\,b_0 Q_j v^j(t)\,,\ e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle D_t\left(\mathscr{M}_j(t)\cdot u^j(t)\right) + a(t)P_j\mathscr{M}_j(t)\cdot u^j(t) + i\,b_0 Q_j \mathscr{M}_j(t)\cdot u^j(t)\,,\ e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle \mathscr{M}_j(t)\cdot D_t u^j(t) + a(t)P_j\mathscr{M}_j(t)\cdot u^j(t) + i\,b(t) Q_j \mathscr{M}_j(t)\cdot u^j(t)\,,\ e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Como qualquer matriz comuta com a sua exponencial, segue que

$$Q_j \mathscr{M}_j(t) = Q_j e^{-(B(t)-b_0 t)\,Q_j} = e^{-(B(t)-b_0 t)\,Q_j} Q_j = \mathscr{M}_j(t) Q_j.$$

Por outro lado, a hipótese de comutatividade implica em $P_j Q_j = Q_j P_j$, portanto

$$P_j \mathscr{M}_j(t) = P_j e^{-(B(t)-b_0 t)\,Q_j} = e^{-(B(t)-b_0 t)\,Q_j} P_j = \mathscr{M}_j(t) P_j, \tag{3.11}$$

então de (3.10), obtém-se

$$\begin{aligned} L_{b_0} v =& \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle \mathscr{M}_j(t)\cdot\left(D_t u^j(t) + a(t)P_j u^j(t) + i\, b_0 Q_j u^j(t)\right),\ e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}} \\ =& \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle e^{-(B(t)-b_0 t)\,Q_j}\cdot f^j(t),\ e^j(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}} \\ =& \Psi_b^{-1}\cdot f = g, \end{aligned} \tag{3.12}$$

ou seja, $L_{b_0} v = g$. De modo equivalente prova-se a outra implicação e conclui-se a demonstração do item *i*. Para os demais itens basta readequar a demonstração do caso unidimensional, logo a demonstração está concluída.

■

Observação 3.2 *Note que um ponto decisivo para se passar da equação* (3.10) *para* (3.12) *é a equação* (3.11)*, que por sua vez é obtida da hipótese* $[p(x,D_x), q(x,D_x)] = 0$. *Observe então que sem essa comutatividade não podemos obter a conjugação entre os campos* L *e* L_{b_0}. *Um fato ainda mais curioso é que este mesmo fenômeno ocorre ao tentarmos conjugar os campos* L *e*

$$L_{a_0} = D_t + a_0 p(x,D) + i\, b(t) q(x,D)$$

através da aplicação (3.9). *De fato, definindo*

$$\mathscr{N}_j(t) = e^{i(A(t)-a_0 t)\,P_j},\ j\in\mathbb{N}.$$

e seguindo as ideias anteriores precisa-se obter

$$Q_j \mathscr{N}_j(t) = Q_j e^{i(A(t)-a_0 t)\,P_j} = e^{i(A(t)-a_0 t)\,P_j} Q_j = \mathscr{N}_j(t) P_j.$$

Conclui-se então que, diferentemente do caso unidimensional, pode não existir redução à forma normal para a parte real do operador através das conjugações acima descritas.

Capítulo 4

Demonstração do Teorema Principal

Começamos relembrando que o operador

$$L = D_t + a(t)p(x,D) + i\,b(t)q(x,D),$$

satisfaz as hipóteses

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{A}) \quad [E, p(x,D)] = 0 \ \text{ e } \ [E, q(x,D)] = 0;\\
&(\mathscr{B}) \quad \text{Para cada } j \in \mathbb{N}, \text{ o auto-espaço } E_{\lambda_j} \text{ tem dimensão 1;}
\end{aligned}$$

das quais seguem a existência das sequência reais $\{\mu_j\}$ e $\{\nu_j\}$, que satisfazem

$$p(x,D)\varphi_j = \mu_j\varphi_j, \ \ q(x,D)\varphi_j = \nu_j\varphi_j, \ \ j \in \mathbb{N},$$

e ainda $\lim_{j\to\infty} |\nu_j| = \infty$.

Note que o operador L é (GH) se, e somente se, é (GH) o operador

$$iL = \partial_t + ia(t)p(x,D) - b(t)q(x,D).$$

Nas proposições 4.4 e 4.5 estudamos a hipoeliticidade do operador iL. A razão desta escolha é tornar a notação (principalmente dos coeficientes de Fourier) mais próxima do caso diferencial presente na maioria dos trabalhos publicados na área.

Segue das discussões feitas na seção 2.1, página 21, que estudar a regularidade de uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$, solução da equação $iLu = f \in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$, equivale a estudar o comportamento das soluções da sequência de equações diferenciais

$$\partial_t u_j(t) + c_j(t)u_j(t) = f_j(t), \ \ t \in \mathbb{T}, \ \ j \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

em que $c_j(t) = -b(t)\nu_j + ia(t)\mu_j$.

Denotando $c_j^0 = -b_0\nu_j + ia_0\mu_j$, obtém-se para cada $j \in \mathbb{N}$, tal que $c_j^0 \notin i\mathbb{Z}$, que a equação (4.1) possui única solução, a qual pode ser escrita como

$$u_j(t) = (1 - e^{-2\pi c_j^0})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{\int_t^{t-s} c_j(\tau)d\tau} f_j(t-s)ds, \tag{4.2}$$

ou equivalentemente,

$$u_j(t) = (e^{2\pi c_j^0} - 1)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{\int_t^{t+s} c_j(\tau)d\tau} f_j(t+s)ds. \tag{4.3}$$

Note que para aplicar a proposição 2.2, página 22, devemos estudar o comportamento das derivadas das soluções 4.2 e 4.3. Os seguintes resultados são utilizados com este propósito.

Proposição 4.1 *Considere a primitiva $C_j(t) = -\nu_j B(t) + i\mu_j A(t)$, em que*

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds \;\; e \;\; B(t) = \int_0^t b(s)ds.$$

Então, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe uma constante $C = C_{k,a,b} > 0$, tal que

$$\left|\partial_t^k e^{C_j(t)}\right| \leqslant C \; j^{k/n} \; e^{-\nu_j B(t)}, \;\; \textit{quando } j \to \infty. \tag{4.4}$$

Demonstração: Para $k = 0$ não há o que provar. Suponha então que (4.4) vale para cada $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$. Pela proposição 3.3 temos que $|\nu_j + i\mu_j|^\ell = \mathrm{O}(j^{\ell/n})$, quando $j \to \infty$, logo:

$$\begin{aligned}
\left|\partial_t^{k+1} e^{C_j(t)}\right| &\leqslant \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} |\partial_t^\ell (e^{C_j(t)}) \, \partial_t^{k-\ell}(-\nu_j b(t) + i\mu_j a(t))| \\
&\leqslant \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} C_{\ell,a,b} \; j^{\ell/n} \; e^{-\nu_j B(t)} \, |\nu_j + i\mu_j| \; \max\left\{\|\partial_t^{k-\ell} a(t)\|_\infty, \|\partial_t^{k-\ell} b(t)\|_\infty\right\} \\
&\leqslant C_{k,a,b} \; j^{\frac{k+1}{n}} \; e^{-\nu_j B(t)}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 4.2 *Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existem constantes C_1, C_2 que dependem apenas de k, a e b satisfazendo*

$$\left|\partial_t^k e^{\int_t^{t-s} c_j(\tau)d\tau}\right| \leqslant C_1 \; j^{k/n} \; e^{\nu_j \int_{t-s}^{t} b(\tau)d\tau}, \;\; s \in [0, 2\pi]$$

e

$$\left|\partial_t^k e^{\int_t^{t+s} c_j(\tau)d\tau}\right| \leqslant C_2 \; j^{k/n} \; e^{-\nu_j \int_t^{t+s} b(\tau)d\tau}, \;\; s \in [0, 2\pi],$$

quando $j \to \infty$.

Retornando ao estudo das soluções 4.2 e 4.3, observe que por ser f uma função suave, então dado $\alpha \in \mathbb{N}_0$, obtemos para cada $\eta > 0$ uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |\partial_t^\alpha f_j(t)| \leqslant C\ j^{-\eta}, \ \text{quando } j \to +\infty. \tag{4.5}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ obtém-se, do corolário 4.2 e da desigualdade (4.5), que as derivadas das soluções (4.2) satisfazem

$$\begin{aligned} |\partial_t^k u_j(t)| &\leqslant \Theta_j \int_0^{2\pi} \left|\partial_t^k \left(e^{\int_t^{t-s} c_j(\tau)d\tau} f_j(t-s)\right) ds\right| \\ &\leqslant \Theta_j \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \int_0^{2\pi} \left|\partial_t^\ell \left(e^{\int_t^{t-s} c_j(\tau)d\tau}\right)\right| \left|\partial_t^{k-\ell} f_j(t-s)\right| ds \\ &\leqslant C\ \Theta_j\ j^{-\eta} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \int_0^{2\pi} j^{l/n}\ e^{\nu_j \int_{t-s}^{t} b(\tau)d\tau} ds \\ &\leqslant C\ \Theta_j\ j^{-\eta+k/n} \int_0^{2\pi} e^{\nu_j \int_{t-s}^{t} b(\tau)d\tau} ds, \end{aligned} \tag{4.6}$$

sendo $\Theta_j = |1 - e^{-2\pi c_j^0}|^{-1}$. De modo análogo, para as soluções (4.3), tem-se

$$\begin{aligned} |\partial_t^k u_j(t)| &\leqslant \Theta_j\ e^{\nu_j 2\pi b_0} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \int_0^{2\pi} \left|\partial_t^\ell \left(e^{\int_t^{t+s} c_j(\tau)d\tau}\right)\right| \left|\partial_t^{k-\ell} f_j(t+s)\right| ds \\ &\leqslant C\ \Theta_j\ e^{\nu_j 2\pi b_0}\ j^{-\eta} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \int_0^{2\pi} j^{l/n}\ e^{-\nu_j \int_t^{t+s} b(\tau)d\tau} ds \\ &\leqslant C\ \Theta_j\ e^{\nu_j 2\pi b_0}\ j^{-\eta+k/n} \int_0^{2\pi} e^{-\nu_j \int_t^{t+s} b(\tau)d\tau} ds. \end{aligned} \tag{4.7}$$

A próxima proposição faz o estudo do comportamento das sequências $\{\Theta_j\}$ e $\{\Theta_j\ e^{\nu_j 2\pi b_0}\}$.

Proposição 4.3 *Se $b_0 < 0$, então*

$$\lim_{j\to+\infty} \Theta_j = 1, \ \text{se } \nu_j \to +\infty, \ \text{e } \lim_{j\to+\infty} \Theta_j e^{\nu_j 2\pi b_0} = 1, \ \text{se } \nu_j \to -\infty.$$

Demonstração: Da relação de Euler

$$e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\,\text{sen}(b)), \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

temos que

$$\Theta_j = \left\{e^{\nu_j 4\pi b_0} - 2e^{\nu_j 2\pi b_0}\cos(2\pi a_0 \mu_j) + 1\right\}^{-1/2}, \tag{4.9}$$

ou, equivalentemente,

$$\Theta_j e^{\nu_j 2\pi b_0} = \left\{1 - 2e^{-\nu_j 2\pi b_0}\cos(2\pi a_0\mu_j) + e^{-4\nu_j \pi b_0}\right\}^{-1/2}. \tag{4.10}$$

Assim, se $\nu_j \to \infty$ então os termos exponenciais de (4.9) convergem para zero. Analogamente, se $\nu_j \to -\infty$ os termos exponencias de (4.10) também se aproximam de 0.

■

A demonstração do teorema principal é apresentada da seguinte forma: os itens i. e ii. são obtidos através das proposições 4.4 e 4.5, respectivamente. Em particular, se vale a hipótese

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{|\nu_j|}{\log(j)} = \kappa < +\infty,$$

então obtemos através da redução à forma normal que L é (GH) se, e somente se, L_{a_0,b_0} é (GH). Portanto, tém-se a demonstração do item *iv.* do teorema principal.

Por uma questão de organização do texto, as duas proposições 4.4 e 4.5 são colocadas numa seção própria, intitulada: *Hipoeliticidade Global e Fenômeno Diofantino.*

Em seguida, introduzimos uma nova seção onde provamos a proposição 4.6, que demonstra o item iii. do teorema principal.

4.1 Hipoeliticidade Global e Fenômeno Diofantino

Proposição 4.4 *Se b não muda de sinal e $b \not\equiv 0$, então L é (GH).*

Demonstração: Note que

$$c_j^0 \in i\mathbb{Z} \iff b_0\nu_j = 0 \text{ e } a_0\mu_j \in \mathbb{Z}$$

mas, por ser $b \not\equiv 0$ e não mudar de sinal tem-se $b_0 \neq 0$. Por outro lado, $\nu_j = 0$ apenas para um número finito de índices j, pois $|\nu_j| \to \infty$. Portanto, o conjunto $\{j \in \mathbb{N}; c_j^0 \in i\mathbb{Z}\}$ é finito.

Assim, para provar que $u_j(t)$ satisfaz (1.9) é suficiente estudar o comportamento das soluções (4.2) e (4.3), para j suficientemente grande.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$b(t) \leqslant 0,\ t \in [0, 2\pi],$$

e em particular $b_0 < 0$. De fato, se for $b(t) \geqslant 0$, então através da mudança de variáveis $(t, x) \mapsto (-t, x)$, L torna-se

$$\widetilde{L} = -D_t + \widetilde{a}(t)p(x, D) + i\widetilde{b}(t)q(x, D),$$

sendo $\widetilde{b}(t) = -b(-t) \leqslant 0$ e claramente L é (GH) se, e somente se, $\widetilde{L}$ é (GH).

Tendo em vista as observações acima, e o fato que $|\nu_j| \to \infty$, vamos mostrar que as derivadas das soluções $\{u_j\}$, dadas em 4.2 e 4.3, satisfazem a condição (2.11) da proposição 2.2, analisando separadamente os casos em que $\{\nu_j\}$ tem subsequências $\nu_{j_k} \to \infty$, ou $\nu_{j_k} \to -\infty$. Para facilitar a notação vamos fazer tais analises admitindo $\nu_j \to +\infty$ e depois $\nu_j \to -\infty$.

Seja $s_0 \in [0, 2\pi]$ o ponto de máximo de b, ou seja,

$$b(s_0) = \max_{t \in [0,2\pi]} b(t) \leqslant 0.$$

Então, para todo $s \in [0, 2\pi]$, temos

$$\int_{t-s}^{t} b(\tau) d\tau \leqslant \; b(s_0)s \leqslant 0 \quad \text{e} \quad \int_{t}^{t+s} b(\tau) d\tau \leqslant \; b(s_0)s \leqslant 0,$$

Quando $\nu_j \to +\infty$, exite um natural j_1 tal que $\nu_j > 0$, para todo $j \geqslant j_1$, assim

$$\int_0^{2\pi} e^{\nu_j \int_{t-s}^{t} b(\tau) d\tau} ds \leqslant 2\pi, \quad j \geqslant j_1. \tag{4.11}$$

Pela proposição 4.3, existem constantes C_1, C_2 e j_2, tais que

$$0 < C_1 \leqslant \Theta_j \leqslant C_2. \tag{4.12}$$

Portanto, tomando j_3 o maior entre j_1 e j_2, segue de (4.6) que

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant C \; j^{-\eta + k/n}, \quad j \geqslant j_3. \tag{4.13}$$

Quando $\nu_j \to -\infty$, usamos a expressão equivalente (4.3) e a estimativa (4.7). Neste caso, existe um natural j_4 tal que $\nu_j < 0$ para todo $j \geqslant j_4$, assim

$$\int_0^{2\pi} e^{-\nu_j \int_{t}^{t+s} b(\tau) d\tau} ds \leqslant 2\pi, \quad j \geqslant j_4. \tag{4.14}$$

Novamente pela proposição 4.3, existem constantes positivas C_3, C_4 e $j_5 \in \mathbb{N}$ e satisfazendo

$$0 < C_1 \leqslant \Theta_j e^{\nu_j 2\pi b_0} \leqslant C_2, \tag{4.15}$$

assim

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant \; C \; j^{-\eta + k/n}, \quad j \geqslant j_6, \tag{4.16}$$

sendo j_6 o maior entre j_4 e j_5.

Logo, tomando $j_0 = \max\{j_3, j_6\}$, segue de (4.5), (4.13) e (4.16) que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $C > 0$

para todo $N > 0$, tais que

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant C\ j^{-N},\ j \geqslant j_0.$$

■

Proposição 4.5 *Se $b \equiv 0$, então o operador L é (GH) se, e somente se, o conjunto das ressonâncias Γ_{a_0} é finito e a_0 é não-Liouville com respeito a sequência $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.*

Demonstração: Provamos primeiramente a suficiência. Considere uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)$ solução da equação $iLu = f \in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$. De acordo com a introdução deste capítulo, os coeficientes de Fourier de u devem satisfazer a equação diferencial

$$\partial_t u_j(t) + ia(t)\mu_j u_j(t) = f_j(t),\ t \in \mathbb{T},\ j \in \mathbb{N}.$$

Como Γ_{a_0} é finito, então $c_j^0 = ia_0\mu_j \in i\mathbb{Z}$ apenas para um número finito de índices, logo é suficiente estudar o comportamento das soluções (4.2), ou (4.3), quando $j \to \infty$.

Sendo $b \equiv 0$, e assim $b_0 = 0$, as expressões (4.6) e (4.7) tornam-se

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant C\ j^{-\eta+k/n}\ \Phi_j,\ \forall\eta > 0,\ \ j \to \infty, \tag{4.17}$$

sendo $\Phi_j = |1 - e^{-2\pi i\mu_j a_0}|^{-1}$.

Note agora que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe um inteiro $\ell(j)$, tal que

$$|1 - e^{-2\pi i\mu_j a_0}| \geqslant 4\,|\mu_j a_0 + \ell(j)|. \tag{4.18}$$

De fato, dado $j \in \mathbb{N}$, existe $\ell(j) \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$|\mu_j a_0 + \ell(j)| \leqslant 1/2. \tag{4.19}$$

Note que

$$|1 - \cos(x)| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|, \quad \text{se} \quad \pi/2 \leqslant |x| \leqslant \pi; \tag{4.20}$$

$$|\mathrm{sen}(x)| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|, \quad \text{se} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]; \tag{4.21}$$

Da relação de Euler (4.8) obtemos as desigualdades

$$|1 - e^{-2\pi i\mu_j a_0}| \geqslant |1 - \cos[2\pi(\mu_j a_0 + \ell(j))]|, \tag{4.22}$$

$$|1 - e^{-2\pi i\mu_j a_0}| \geqslant |\mathrm{sen}[2\pi(\mu_j a_0 + \ell(j))]|, \tag{4.23}$$

portanto:

- Se $\pi/2 \leqslant |2\pi[\mu_j a_0 + \ell(j)]| \leqslant \pi$, então: (4.22), (4.20) e (4.19) $\Longrightarrow$ (4.18).
- Se $|2\pi[\mu_j a_0 + \ell(j)]| \leqslant \pi/2$, então: (4.23), (4.21) e (4.19) $\Longrightarrow$ (4.18).

Então, como a_0 é não-Liouville, com respeito a μ_j, segue que

$$\Phi_j = |1 - e^{-2\pi c_j^0}|^{-1} \leqslant C\ |a_0\mu_j + \ell(j)|^{-1} \leqslant C\left(\inf_{\ell\in\mathbb{Z}}|a_0\mu_j + \ell|\right)^{-1} \leqslant C\, j^{\delta}, \tag{4.24}$$

para j grande o suficiente.

Segue de (4.17) e (4.24) que

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant C\ j^{-\eta + k/n + \delta},\ \forall \eta > 0,\ j \to \infty,$$

implicando $u \in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$, provando que L é (GH).

Para demonstrar a necessidade das hipóteses Γ_{a_0} finito e a_0 é não-Liouville, estudamos o operador

$$L_{a_0} = D_t + a_0 p(x, D),$$

pois, pela redução à forma normal, L_{a_0} é (GH) se, e somente se L é (GH).

Comece supondo que Γ_{a_0} é um conjunto infinito, com

$$\Gamma_{a_0} = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_k < \ldots\}$$

e defina a seguinte sequência de funções em $C^\infty(\mathbb{T})$:

$$u_j(t) \doteq \begin{cases} e^{-ia_0\mu_{j_k}t}, \text{ se } j = j_k, \\ 0, \text{ se } \ j \neq j_k. \end{cases}$$

Note que $|u_{j_k}(t)| \equiv 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e fixado $\ell \in \mathbb{N}$ tém-se

$$|\partial_t^\ell u_{j_k}(t)| = |a_0\mu_{j_k}|^\ell \leqslant\ C\ j_k^{\ell/n},\ k \to \infty,$$

portanto $u_j(t)$ define um elemento $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)\setminus C^\infty(\mathbb{T}\times M)$. Por outro lado,

$$L_{a_0}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j(t)\varphi_j(x)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}}[D_t(e^{-ia_0\mu_{j_k}t}) + a_0\mu_{j_k}e^{-ia_0\mu_{j_k}t}]\varphi_{j_k}(x)\ =\ 0,$$

então L_{a_0} não é (GH) e assim L também não é (GH).

Suponha agora que a_0 é μ_j-Liouville. Neste caso, existe uma subsequência $\{\mu_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de números inteiros $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tais que

$$|a_0\mu_{j_k}-\tau_k|<{j_k}^{-k/2},\ k\to\infty. \tag{4.25}$$

Particularmente, segue de (4.25) que

$$|\tau_k|=\mathrm{O}({j_k}^{-k/2+1/n}),\ k\to\infty. \tag{4.26}$$

Defina as seguintes sequências de funções suaves em $\mathbb{T}$

$$u_j(t)=\begin{cases} e^{-i\tau_k t},\ \text{se } j=j_k,\\ 0,\ \text{caso contrário.}\end{cases} \quad \text{e} \quad f_j(t)=\begin{cases} (a_0\mu_{j_k}-\tau_k)e^{-i\tau_k t},\ \text{se } j=j_k,\\ 0,\ \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Segue de (4.26), que para todo $\ell\in\mathbb{N}$, tem-se

$$|\partial_t^\ell u_{j_k}(t)|=|\tau_k|^\ell\leqslant C\ {j_k}^{-k/2+1/n},\ k\to\infty,$$

e como $|u_{j_k}(t)|\equiv 1$, então $\{u_j(t)\}$ define uma distribuição $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)\setminus C^\infty(\mathbb{T}\times M)$.

Porém, para cada $\ell\in\mathbb{N}_0$, obtemos de (4.25) e (4.26) que

$$\begin{aligned}|\partial_t^\ell f_{j_k}(t)|\leqslant&|\tau_k|^\ell|a_0\mu_{j_k}-\tau_k|\leqslant C\ j_k^{-k/2}\ {j_k}^{-k/2+1/n}\\ \leqslant&C\ {j_k}^{-k+1/n},\ k\to\infty.\end{aligned}$$

Logo, $\{f_j(t)\}$ define uma função $f\in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$, tal que $L_{a_0}u=f$, portanto L_{a_0} não é (GH) e consequentemente L também não é.

■

4.2 Mudança de Sinal e Crescimento Super-Logarítmico

Proposição 4.6 *Suponha que b muda de sinal e que existe uma subsequência $\{\nu_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\nu_{j_k}|}{\log(j_k)}=+\infty. \tag{4.27}$$

Então, L não é (GH).

Nossa estratégia para esta demonstração é exibir uma solução singular para a equação $Lu=f$, isto é, apresentamos uma sequência de funções $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $C^\infty(\mathbb{T})$, tal que

$$u=\sum_{j\in\mathbb{N}}u_j(t)\varphi_j\in\mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M)\setminus C^\infty(\mathbb{T}\times M)\quad\text{e}\quad f\doteq Lu\in C^\infty(\mathbb{T}\times M).$$

A demonstração da proposição 4.6 será dividida em três subseções: Na primeira estudamos o caso em que $b \in C^{\omega}(\mathbb{T})$, pois assim a prova se torna mais elegante e os passos contém ideias centrais para o estudo mais geral. Na seção seguinte exibimos uma função suave b, para a qual a demonstração no primeiro caso não pode ser aplicada, a priori. Por fim, na terceira subseção, consideramos o caso geral em que $b \in C^{\infty}(\mathbb{T})$.

4.2.1 O Caso Analítico

Para ajudar a organizar a demonstração e simplificar as notações vamos supor inicialmente que a subsequência $\{\nu_{j_k}\}$ é positiva, e assim $\nu_{j_k} \to +\infty$.

Uma vez que b é analítica e periódica, existem pontos $t_0, t^*, t^{**} \in [0,2\pi]$ satisfazendo $b(t_0) = 0$, $0 \leqslant t^* < t_0 < t^{**} \leqslant 2\pi$,

$$b(s) > 0,\ \forall s \in [t^*, t_0) \quad \text{e} \quad b(s) < 0,\ \forall s \in (t_0, t^{**}].$$

Defina as primitivas

$$A(t) \doteq \int_{t_0}^{t} a(s)ds \ \text{ e } \ B(t) \doteq \int_{t_0}^{t} b(s)ds,\ t \in [t^*, t^{**}],$$

e fixe dois pontos $t_1 \in (t^*, t_0)$ e $t_2 \in (t_0, t^{**})$. Então

$$B(t^*) \leqslant B(s) \leqslant B(t_1) \leqslant 0, \text{ se } s \in (t^*, t_1), \text{ e} \tag{4.28}$$

$$B(t^{**}) \leqslant B(s) \leqslant B(t_2) \leqslant 0, \text{ se } s \in (t_2, t^{**}). \tag{4.29}$$

Sejam $g, \psi \in C^{\infty}(\mathbb{T})$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\text{supp}(\psi) \subset [0,2\pi] \ \text{ e } \ \psi|_{[t^*,t^{**}]} \equiv 1,\\ &\text{supp}(g) \subset [t^*, t^{**}] \ \text{ e } \ g|_{[t_1,t_2]} \equiv 1. \end{aligned}$$

Assim, defina a sequência $\{u_j\} \subset C^{\infty}(\mathbb{T})$ pondo

$$u_j(t) = \begin{cases} g(t)e^{\nu_{j_k} B(t)\psi(t) - i\mu_{j_k} A(t)\psi(t)}, & \text{se } j = j_k \text{ para algum } k \in \mathbb{N},\\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que

$$g(t)e^{\nu_{j_k} B(t)\psi(t) - i\mu_{j_k} A(t)\psi(t)} = e^{\nu_{j_k} B(t) - i\mu_{j_k} A(t)},\ \forall t \in \text{supp}(g),$$

logo das inequações (4.28), (4.29) obtemos $e^{\nu_{j_k} B(t)\psi(t)} \leqslant 1$, para $t \in \text{supp}(g)$ e k suficientemente grande, uma vez que $\nu_{j_k} \to +\infty$.

Então, para todo $\beta \in \mathbb{N}_0$ e $t \in \operatorname{supp}(g)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\partial_t^{\beta} u_{j_k}(t)\right| &\leqslant \sum_{\alpha \leqslant \beta} \binom{\beta}{\alpha} \left|\partial_t^{\beta-\alpha}\big(g(t)\big)\right| \, \left|\partial_t^{\alpha}\left(e^{\nu_{j_k} B(t) - i\mu_{j_k} A(t)}\right)\right| \\
&\leqslant C_{a,b,g,\beta}\big(|\mu_{j_k}| + |\nu_{j_k}|\big)^{\beta} e^{\nu_{j_k} B(t)} \\
&\leqslant C\, j_k^{\beta/n},
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$.

Uma vez que $|u_{j_k}(t_0)| = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, então

$$u \doteq \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j(t) \varphi_j(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} \times M) \setminus C^{\infty}(\mathbb{T} \times M).$$

Mostraremos agora que $f \doteq Lu \in C^{\infty}(\mathbb{T} \times M)$. Aqui, $f = \sum_j f_j(t) \varphi_j(x)$, sendo

$$f_j(t) = \begin{cases} -i g'(t) e^{\nu_{j_k} B(t)\psi(t) - i\mu_{j_k} A(t)\psi(t)}, & \text{se } \ j = j_k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\ 0, \ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\operatorname{supp}(f_{j_k}) \subset [t^*, t_1] \cup [t_2, t^{**}]$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$|\partial_t^{\beta} f_{j_k}(t)| \leqslant C \ j_k^{\beta/n} \ e^{\nu_{j_k} B(t)\psi(t)}, \ \ k \to \infty. \tag{4.30}$$

Observe que, até este ponto, não podemos eliminar o termo exponencial acima através das expressões (4.28) e (4.29), pois isso garantiria apenas que $\{f_j\}$ tem crescimento lento e portanto f seria uma distribuição periódica, sem garantias de ser uma função suave. Precisamos então analisar as consequências do crescimento super-logarítmico para obter o decaimento rápido (1.9).

Definindo $\rho \doteq -\max\{B(t_1), B(t_2)\} > 0$, segue de (4.28) e (4.29) que

$$\nu_{j_k} B(t)\psi(t) \leqslant -\nu_{j_k}\rho, \ \forall t \in \operatorname{supp}(f_{j_k}).$$

Uma vez que (4.27) é equivalente a

$$(\forall \eta > 0)(\exists\ k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k_0)\ \log(j_k^{\eta}) < \nu_{j_k},$$

segue de (4.30) que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^{\beta} f_{j_k}(t)| &\leqslant C\, {j_k}^{\beta/n} e^{\nu_{j_k} B(t)} \leqslant C\, {j_k}^{\beta/n} e^{-\nu_{j_k}\rho} \\
&\leqslant C\, {j_k}^{\beta/n} e^{-\rho \log({j_k}^{\eta})} \ \leqslant \ C\, {j_k}^{-\eta\rho + \beta/n}, \text{se } k > k_0,
\end{aligned}$$

para cada $t \in \operatorname{supp}(f_{j_k})$.

Como η pode ser escolhido arbitrariamente grande, então a sequência $\{f_j\}$ satisfaz (1.9), portanto tem-se $f \in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$, logo L não é (GH).

Assim a prova fica concluída no caso $\nu_{j_k} \to +\infty$ e b muda de sinal de mais para menos.

Agora, observando a construção acima, é fácil ver que podemos substituir a condição $\nu_{j_k} \to +\infty$ pela condição mais fraca: $\{\nu_{j_k}\}$ possui uma subsequência que diverge para $+\infty$. Por outro lado, se $\nu_{j_k} \to -\infty$, então pela periodicidade de b, podemos considerar um ponto onde b muda de sinal de menos para mais e sem dificuldades podemos adaptar a demonstração acima para esta situação.

∎

Observação 4.1 *A demonstração apresentada acima se estende facilmente para o seguinte caso: Existem um intervalo* $[t_0, t_1] \subset [0, 2\pi]$ *e um* $\delta > 0$*, tais que*

$$\begin{gathered} b(t) > 0, \forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0), \\ b \equiv 0, \forall\, t \in [t_0, t_1], \\ b(t) < 0, \forall\, t \in (t_1, t_1 + \delta). \end{gathered}$$

De fato, basta considerar duas funções de corte g_0 *e* g_1*, tais que*

$$\begin{gathered} supp\,(g_0) \subset [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \;\; e \;\; g_0|_{[t_0-\epsilon/2, t_0+\epsilon/2]} \equiv 1, \\ supp\,(g_1) \subset [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \;\; e \;\; g_1|_{[t_1-\epsilon/2, t_1+\epsilon/2]} \equiv 1, \end{gathered}$$

para $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

Defina as primitivas

$$\begin{aligned} B_0(t) &\doteq \int_{t_0}^{t} b(s)ds, \;\; t \in supp(g_0), \\ B_1(t) &\doteq \int_{t_1}^{t} b(s)ds, \;\; t \in supp(g_1) \end{aligned}$$

Assim, a sequência de funções

$$u_j(t) = \begin{cases} g_0(t)e^{\nu_{j_k} B_0(t) - i\mu_{j_k} A(t)} + g_1(t)e^{\nu_{j_k} B_1(t) - i\mu_{j_k} A(t)}, & se\;\; j = j_k \;\; para\ algum\ k \in \mathbb{N} \\ 0, & caso\ contrário; \end{cases}$$

define uma $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}\times M) \setminus C^\infty(\mathbb{T}\times M)$*, tal que* $Lu \in C^\infty(\mathbb{T}\times M)$*.*

4.2.2 Oscilação Total

É importante observar que, na demonstração anterior, a analiticidade de b é utilizada apenas para garantir que seu conjunto de seus zeros é discreto, portanto, se $b(t_0) = 0$ então podemos escolher $\epsilon > 0$

tal que b mantém sinal na vizinhança $[t_0-\epsilon, t_0]$ e o sinal oposto em $[t_0, t_0+\epsilon]$.

O objetivo desta subseção é construir uma função b que não mantem sinal em nenhuma vizinhança de um zero, ou seja, se $b(t^*)=0$, então para qualquer vizinhança a esquerda deste zero, b assumirá valores negativos e positivos, sendo que o mesmo ocorre para qualquer vizinhança a direita. Portanto, a construção feita para o caso analítico não pode ser aplicado, a priori, para este tipo de função.

Primeiramente, defina sobre qualquer intervalo aberto $I=(\alpha,\beta)$ a função

$$\mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}(t) \doteq e^{-\sigma\left(\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2-\left(t-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\right)^{-\rho}}, \; t\in I.$$

sendo σ e ρ constantes positivas.

Dessa forma $\mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}$ é analítica em I e, se definirmos $\mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}\equiv 0$ sobre $\mathbb{R}\setminus I$, nós obtemos uma função suave mas não analítica em $\mathbb{R}$. De fato, basta checarmos os extremos no intervalo I. Uma vez que obtem-se $\mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}(\alpha)=\mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}(\beta)=0$, a continuidade de $\mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}$ e todas as suas derivadas nestes pontos seguem do fato de que

$$\sup_{t\in I}|\mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}(t)| = \mathrm{E}^{\sigma}_{\rho,I}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) = e^{-\sigma\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{-2\rho}}.$$

Agora, denote por $\mathbf{K}$ o conjunto de Cantor do intervalo $[0,1]$. Lembramos que no primeiro estágio da construção de $\mathbf{K}$, o terço médio $I_{0,1}$ de $[0,1]$ é removido, restando o conjunto $\mathbf{K}_1$ que é a união de dois intervalos fechados. Em seguida, removemos o terço médio $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$ de cada uma das componentes de $\mathbf{K}_1$, restando agora o conjunto $\mathbf{K}_2$ que é a união de 2^2 intervalos fechados. Então, continuando indutivamente, removemos de cada componente $\mathbf{K}_j$ os terços médios

$$I_{j,1}, I_{j,2}, \dots, I_{j,2^j}, \text{ de comprimento } 1/3^{j+1},$$

restando o conjunto $\mathbf{K}_{j+1}$, o qual é a união de 2^j intervalos fechados. Assim

$$\mathbf{K}=[0,1]\setminus\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{\ell=1}^{2^j} I_{j,2^\ell}.$$

Finalmente, fixando $\sigma=1$, definimos a função b em $[0,2\pi]$ por

$$b(t)=\begin{cases} (-1)^\ell\,\mathrm{E}^{1}_{\rho,I_{j,\ell}}(t), & \text{se } t\in I_{j,l},\ \ell=1,2,3,\dots,2^j \text{ e } j\in\mathbb{N};\\ \mathrm{E}^{1}_{\rho,I}(t), & \text{se } t\in[1,2\pi];\\ 0, & \text{se } t\in\mathbf{K}.\end{cases}$$

Observe que

1. b é analítica em $[0,2\pi]\setminus\mathbf{K}$;
2. $b|_{\mathbf{K}}\equiv 0$;
3. Para cada $\tau\in\mathbf{K}$ e cada $\delta>0$, existem pontos

$t_1, t_2 \in (\tau - \delta, \tau)$ tais que $b(t_1) < 0 < b(t_2)$, e
$t_1', t_2' \in (\tau, \tau + \delta)$ tais que $b(t_1') < 0 < b(t_2')$.

Então, a função b assume valores positivos e negativos, mas não muda de sinal de modo semelhante a seção anterior, portanto aquela demonstração não tem porquê ser aplicável neste caso.

Observe que a continuidade de b e todas as suas derivadas em cada ponto de **K** segue de $b(\tau) = 0$, para todo $\tau \in K$ e de

$$\sup_{t \in I_{j,l}} |\mathrm{E}^1_{\rho, I_{j,l}}(t)| = e^{-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3^j+1}\right)^{-2\rho}}.$$

4.2.3 O Caso Suave

É razoável dizer que uma função "muda de sinal" se esta assume valores positivos e negativos. Entretanto, como visto anteriormente, a questão importante da mudança de sinal é analisar como a função b se comporta numa vizinhança de seus zeros. Neste sentido, descreveremos no que segue o significado de "b muda se sinal num ponto", tendo como motivação os trabalhos de Niremberg e Treves [20, 21, 26], sobre resolubilidade e hipoeliticidade.

Definição 4.1 *Dizemos que $b \in C^\infty(\mathbb{T})$ muda de sinal em algum ponto $t_0 \in \mathbb{T}$, se $b(t)$ assume valores positivos e negativos em toda vizinhança de t_0 e é possível determinar, próximo a t_0, um ponto t_1 tal que a primitiva $B(t)$ de $b(t)$ que se anula em t_1 possui as seguintes propriedades:*

i. $B(t)$ mantém o mesmo sinal em alguma vizinhança de t_1;

ii. $B(t)$ não se anula identicamente em $(t_1 - r, t_1)$, nem em $(t_1, t_1 + r)$, para todo $r > 0$.

Observação 4.2 *No exemplo da subseção anterior todos os pontos pertencentes ao conjunto de Cantor* **K** *são pontos onde b muda de sinal. De fato, se $t_0 \in$* **K** *é um ponto arbitrário então, dado $\delta > 0$, existem pontos $t^+ \in (t_0 - \delta, t_0)$ and $t^- \in (t_0, t_0 + \delta)$ tais que $b(t^+) > 0$ e $b(t^-) < 0$. Assim, qualquer primitiva de $b(t)$ possui um ponto de máximo $t_1 \in (t^+, t^-)$, portanto*

$$B(t) = \int_{t_1}^{t} b(s)ds,$$

se anula em t_1 e satisfaz as condições i. e ii. acima. Note ainda que todos os ponto no conjunto de Cantor são pontos onde b muda de sinal de mais para menos e também de menos para mais.

Para finalizar a demonstração da proposição 4.6, no caso geral $b \in C^\infty(\mathbb{T})$, note que as condições i. e ii. da definição (4.1) nos dão exatamente as inequações obtidas em (4.28) e (4.29), então a demonstração para $b \in C^\infty(\mathbb{T})$ segue as mesmas ideias anteriores.

Capítulo 5

Sobre Algumas Hipóteses do Teorema Principal

Neste capítulo discutimos a necessidade de duas hipóteses fundamentais de nosso trabalho, a partir das quais pudemos estabelecer o teorema 2.3, a saber:

- a comutatividade entre os operadores $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$; e
- o fato de $|\nu_j| \to \infty$.

A ideia aqui é enfraquecer essas hipóteses e construir exemplos mostrando quais resultados são preservados e quais são perdidos. Para essa discussão nos apoiaremos nos resultados e notações de Ruzhansky e Delgado, ver [5], para isso introduzimos aqui as seguintes notações:

Fixado um operador elíptico $E \in \mathscr{E}^m(\mathbb{T})$, seja $\left\{e_k^j\right\}_{k=1}^{d_j}$ uma base dos auto-espaços E_{σ_j} e considere a decomposição

$$L^2(M) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} E_{\sigma_j}, \ \ E_{\sigma_j} = \operatorname{span}\ \left\{e_k^j\right\}_{k=1}^{d_j}, \ j \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, fixamos uma matriz $\sigma(j) \in \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ e definimos

$$T \cdot u = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left\langle \sigma(j) \cdot u^j \ , \ e^j(x) \right\rangle_{\mathbb{C}^{d_j}}, \ \ u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}). \tag{5.1}$$

Se a aplicação T acima define um operador linear $T : C^\infty(M) \to L^2(M)$, dizemos que a família $\sigma_T = \{\sigma(j);\ j \in \mathbb{N}\}$ é o símbolo de T.

Os seguintes resultados caracterizam a regularidade de tais operadores através do estudo de seus símbolos.

Proposição 5.1 *Seja T um operador linear $T : C^\infty(M) \to L^2(M)$ da forma* (5.1). *Então T possui extensão* *contínua $L^2(M) \to L^2(M)$ se, e somente se,*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} ||\sigma(j)||_{op} < \infty,$$

sendo $||\sigma(j)||_{op} = ||\sigma(j)||_{\mathscr{L}(E_{\sigma(j)})}$. Além disso,

$$||T||_{\mathscr{L}(L^2(M))} = \sup_{j\in\mathbb{N}} ||\sigma(j)||_{op}.$$

Demonstração: Ver teorema 4.3, em [5]. ■

Combinando-se a proposição acima, a fórmula de Weyl e o corolário 4.5 - [5], obtém-se:

Proposição 5.2 *Sejam T um operador como na proposição 5.1 e σ_T seu símbolo. Se existem $C > 0$ e um número $\kappa \in \mathbb{R}$, tais que*

$$||\sigma(j)||_{op} \leqslant C\, j^{\kappa/n},\ \forall\, j \in \mathbb{N},$$

então T possui extensão contínua $\mathscr{H}^s(M) \to \mathscr{H}^{s-\kappa}(M)$, para cada $s \in \mathbb{R}$.

Organizamos este capítulo em duas seções: na primeira mostramos como é possível enfraquecer a hipótese $|\nu_j| \to \infty$ recuperando-se ainda as conclusões do teorema principal. Na segunda seção exibimos um exemplo de operador L em que $[p,q] \neq 0$ e estudamos a hipoeliticidade desse operador, mostrando que os resultados do teorema principal não são necessariamente preservados e que novos e interessantes fenômenos Diofantinos podem aparecer.

5.1 A Condição $|\nu_j| \to \infty$

Antes de iniciar uma discussão mais aprofundada a respeito da hipótese

$$\lim_{j\to\infty} |\nu_j| = \infty, \tag{5.2}$$

destacamos que ela foi usada apenas nos seguintes pontos da demonstração do teorema principal:

a. na página 40, para obter as limitações

$$0 < C_1 \leqslant \Theta_j \leqslant C_2 \quad \text{e} \quad 0 < C_1 \leqslant \Theta_j e^{\nu_j 2\pi b_0} \leqslant C_2,\ j \to \infty.$$

b. também na página 40, para obter as estimativas

$$\int_0^{2\pi} e^{\nu_j \int_{t-s}^{t} b(\tau)d\tau} ds \leqslant 2\pi \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} e^{-\nu_j \int_{t}^{t+s} b(\tau)d\tau} ds \leqslant 2\pi,\ j \to \infty.$$

c. Na página 30, para obter as desigualdades

$$\rho\,\nu_j \leqslant (B(t)-b_0 t)\nu_j \leqslant \delta\,\nu_j \quad \text{e} \quad \delta\,\nu_j \leqslant (B(t)-b_0 t)\nu_j \leqslant \rho\,\nu_j,\ j\to\infty.$$

d. Na página 39, para garantir que $\nu_j = 0$ apenas para um número finito de índices j.

Não é difícil ver que os resultados a que se referem os itens (b), (c) e (d) acima podem ser obtidos exigindo-se que

$$\textit{existem } C>0 \textit{ e } j_0\in\mathbb{N}, \textit{ tais que } |\nu_j|\geqslant C,\ \forall j\geqslant j_0.$$

Por outro lado, a principal virtude do resultado destacado no item (a) é garantir que nenhuma das sequências $\{\Theta_j\}$ e $\{\Theta_j e^{\nu_j 2\pi b_0}\}$ divirja para $+\infty$, ou de modo equivalente, garantir que a sequência

$$\omega_j = e^{\nu_j 2\pi b_0}\left(e^{\nu_j 2\pi b_0} - 2\cos(2\pi a_0\mu_j)\right)+1 \tag{5.3}$$

não possua subsequências convergindo para zero.

Logo, vamos estabelecer sob quais condições essa sequência possui uma subsequência $\{\omega_{j_k}\}_k$ convergindo para zero, quando $k\to\infty$.

Observe que se $\omega_{j_k}\to 0$ então, da expressão (5.3), obtemos

$$e^{\nu_{j_k}2\pi b_0} < 2\cos(2\pi a_0\mu_{j_k}) \leqslant 2,\ k\to\infty,$$

o que implica em

$$\nu_{j_k}\pi b_0 < \log(2),\ k\to\infty.$$

Sejam $\kappa = \limsup_{k\in\mathbb{N}} \nu_{j_k}$ e $\{\nu_{j_\ell}\}_\ell$ uma subsequência, tal que

$$\lim_{\ell\to\infty}\nu_{j_\ell} = \kappa \quad \text{e} \quad \lim_{\ell\to\infty} e^{\nu_{j_\ell}2\pi b_0} = \alpha < 2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{\ell\to\infty}\omega_{j_\ell} &= \lim_{\ell\to\infty} e^{\nu_{j_\ell}2\pi b_0}\left(e^{\nu_{j_\ell}2\pi b_0} - 2\cos(2\pi a_0\mu_{j_\ell})\right)+1\\ &= \alpha\left(\alpha - 2\lim_{\ell\to\infty}\cos(2\pi a_0\mu_{j_\ell})\right)+1, \end{aligned}$$

e então

$$\lim_{\ell\to\infty}\cos(2\pi a_0\mu_{j_\ell}) = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}. \tag{5.4}$$

Desta última condição tem-se $1+\alpha^2 \leqslant 2\alpha$, o que ocorre apenas para $\alpha = 1$. Deste fato, conclui-se que $\kappa = 0$.

Assim, uma condição necessária para que $\{\omega_j\}$ tenha uma subsequência se aproximando de zero é que $\{\nu_j\}$ possua alguma subsequência $\{\nu_{j_\ell}\}_\ell$ convergindo para zero. Em particular, tem-se de (5.4), que $\{a_0\mu_{j_\ell}\}_\ell$ converge para algum inteiro θ.

Então, desta discussão prova-se o seguinte resultado:

Proposição 5.3 *No enunciado do teorema 2.3, a hipótese* (5.2) *pode ser substituída pela seguinte condição mais fraca:*

Zero não é ponto de acumulação da sequência de $\{\nu_j\}$.

Exemplo 5.1 *Sejam* $\tau \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}_+$ *e a sequência*

$$\mu_j = \frac{(c+j)^\tau}{j^\tau},$$

para a qual existem $j_0 \in \mathbb{N}$ *e* $C' > 0$ *tais que*

$$0 < C' \leqslant \mu_j, \ \ \forall j \geqslant j_0. \tag{5.5}$$

Considere o operador

$$q(x, D_x)\cdot u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \mu_j \varphi_j(x)$$

que possui extensão contínua $q(x, D_x) : \mathscr{H}^s(\mathbb{T}_x) \to \mathscr{H}^s(\mathbb{T}_x)$, *pela proposição 5.2.*

Assim, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, *defina*

$$\mathscr{P} = D_t + \alpha q(x, D_x), \ \ (t, x) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_t \times \mathbb{T}_x.$$

Suponha que α *é um número irracional não-Liouville, ou seja, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left|\alpha + \frac{p_j}{q_j}\right| \geqslant \frac{1}{|q_j|^\delta}, \tag{5.6}$$

para toda sequência de números racionais $\{p_j/q_j\}$.

Afirmamos que α *é não-Liouville com respeito a* μ_j. *De fato, para cada* $\ell \in \mathbb{Z}$ *obtemos de* (5.6) *e* (5.5) *que*

$$\begin{aligned} |\alpha\mu_j + \ell| = \mu_j \left|\alpha + \frac{\ell j^\tau}{(c+j)^\tau}\right| &\geqslant \frac{C'}{(c+j)^{\tau\delta}} \\ &\geqslant \frac{C}{j^{\tau\delta}}, \end{aligned}$$

logo tem-se $\inf_{\ell\in\mathbb{Z}} |\alpha\mu_j + \ell| \geqslant C\ j^{-\delta\tau}$, $\forall j \geqslant j_0$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, *então*

$$\Gamma_\alpha = \{j \in \mathbb{N};\, \alpha\mu_j \in \mathbb{Z}\} = \emptyset.$$

Assim, segue do teorema princiapal, item i, que o operador $\mathscr{P}$ *é (GH).*

Observação 5.1 *Para obter um operador elíptico em $E \in \mathscr{E}^m(\mathbb{T}_x)$ podemos utilizar a construção feita na seção 1.2.2, página 12.*

Neste ponto surge uma pergunta natural: quais são as consequências na regularidade do operador L quando existe uma subsequência de $\{\nu_j\}$ convergindo para zero?

Não temos uma resposta completa para esta questão, entretanto, exibimos um exemplo que pode contribuir para se compreender as consequências de tal comportamento de $\{\nu_j\}$.

Considere uma sequência de números reais $\{\mu_j\}$ convergente a zero e defina

$$q(x, D_x)\cdot u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \mu_j \varphi_j(x),$$

para cada $u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \varphi_j(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}_x)$.

Segue da proposição 5.2 que $q(x, D_x)$ possui extensão contínua $\mathscr{H}^s(\mathbb{T}_x) \to \mathscr{H}^s(\mathbb{T}_x)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear

$$\mathscr{P} = D_t + (\alpha + i\beta) q(x, D_x),\ (t, x) \in \mathbb{T}_t \times \mathbb{T}_x.$$

Como apresentado no capítulo 4, estudar a regularidade das soluções de $\mathscr{P}\cdot u = f$ equivale a estudar o comportamento das soluções das equações

$$\partial_t u_j(t) + \mu_j(-\beta + i\alpha) u_j(t) = f_j(t),\ t \in \mathbb{T},\ j \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Suponha que o conjunto $\{j \in \mathbb{N};\ \mu_j(-\beta + i\alpha) \in \mathbb{Z}\}$ seja finito.

Nestas condições, as soluções de (5.7) podem ser escritas como

$$u_j(t) = \left(1 - e^{2\pi\mu_j(\beta - i\alpha)}\right)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{\mu_j(-\beta + i\alpha)s} f_j(t - s)\, ds,\ t \in \mathbb{T},$$

para j suficientemente grande.

Assim, se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, então dado $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ obtemos $\forall \eta > 0$, uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$|\partial_t^\gamma u_j(t)| \leqslant C j^{-\eta} \Theta_j\ ,\ j \to \infty,$$

sendo $\Theta_j = |1 - e^{2\pi\mu_j(\beta - i\alpha)}|^{-1}$.

A respeito da regularidade do operador $\mathscr{P}$, no caso $\alpha \neq 0$, obtemos:

Proposição 5.4 *$\mathscr{P}$ é (GH) se, e somente se, α é não-Liouville com respeito a $\{\mu_j\}$.*

Demonstração: Para j suficientemente grande, tem-se

$$\begin{aligned}\Theta_j &= \left\{e^{\mu_j 2\pi\beta}\left(e^{\mu_j 2\pi\beta} - 2\cos(2\pi\alpha\mu_j)\right) + 1\right\}^{-1/2} \\ &\leqslant 2^{-1/2}\left\{1 - \cos\left(2\pi\alpha\mu_j\right)\right\}^{-1/2}.\end{aligned}$$

Uma vez que $|1-\cos(y)| \geqslant |y|^3$, para $|y| \leqslant 1/2$, obtém-se

$$\Theta_j \leqslant C|\alpha\mu_j|^{-3/2} \leqslant C\left\{\inf_{\ell\in\mathbb{Z}}|\alpha\mu_j - \ell|\right\}^{-3/2}, \ j \to \infty$$

Portanto, se α é não-Liouville com respeito a $\{\mu_j\}$, segue que $\Theta_j \leqslant C j^{\delta}$, para algum $\delta > 0$, para j suficientemente grande, logo o operador $\mathscr{P}$ é (GH).

Suponha agora que α é Liouville com respeito a $\{\mu_j\}$. Assim, da prova da proposição 4.5, obtêm-se uma subsequência $\{\mu_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de inteiros $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ tais que

$$|a_0\mu_{j_k} - \tau_k| < {j_k}^{-k/2} \quad \text{e} \quad |\tau_k| = \mathrm{O}({j_k}^{-k/2}), \ k \to \infty. \tag{5.8}$$

Para completar a demonstração, basta observar que a sequência

$$u_j(t) = \begin{cases} e^{-i\tau_k t}, \text{ se } j = j_k, \\ 0, \text{ caso contrário.}\end{cases}$$

corresponde a uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)\setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$, enquanto que, de (5.8) obtemos a sequência

$$f_j(t) = \begin{cases} [(\alpha\mu_{j_k} - \tau_k) + i\mu_{j_k}\beta]e^{-i\tau_k t}, \text{ se } j = j_k, \\ 0, \text{ caso contrário.}\end{cases}$$

que fornece uma função $f \doteq \mathscr{P}\cdot u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. ■

Exemplo 5.2 *Sejam $\tau \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}_+$ e defina a sequência*

$$\mu_j = \frac{(c+j)^\tau}{j^{\tau+1}},$$

a qual converge para zero.

Dado um número irracional α considere o operador

$$\mathscr{L} = D_t + \alpha q(x, D_x), \ (t,x) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_t \times \mathbb{T}_x,$$

sendo

$$q(x, D_x)\cdot u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j\mu_j\varphi_j(x).$$

Suponha que α é um número não-Liouville, então para cada $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\alpha\mu_j + \ell| = \mu_j \left|\alpha + \frac{\ell j^{\tau+1}}{(c+j)^\tau}\right| &\geqslant \nu_j \frac{1}{(c+j)^{\tau\delta}} \\ &= \frac{(c+j)^\tau}{j^{\tau+1}} \frac{1}{(c+j)^{\tau\delta}} = \frac{C'}{j^\tau (c+j)^{\tau(\delta-1)}} \\ &\geqslant \frac{C}{j^{\tau\delta}}, \end{aligned}$$

portanto α é não-Liouville com respeito a sequência $\{\mu_j\}$.

Uma vez que α é um número irracional obtemos $\Gamma_\alpha = \emptyset$, logo segue da proposição 5.4 que $\mathscr{L}$ é (GH).

Observação 5.2 *A proposição 5.4 garante a existência de operadores lineares da forma*

$$L = D_t + (a + b\,i)q(x, D_x),$$

definidos sobre o toro $\mathbb{T}^2$ não globalmente hipoelíticos, mesmo com parte imaginária $b \neq 0$, o que se trata de um fenômeno surpreendente quando comparado aos resultados clássicos obtidos por Greenfield e Wallach, [12], ou mais gerais de Hounie-[15].

Note ainda que a sequência $\{\mu_j\}$ tem crescimento no máximo logarítmico, portanto pela redução à forma normal, a conclusão acima vale para operadores com coeficientes variáveis. Pode-se então obter operadores com partes imaginárias não identicamente nulas, que não mudam de sinal, e ainda assim não-(GH). Um resultado que não pode ser obtido pelo teorema principal, ou ainda, pelos resultados em Hounie-[15].

5.2 Operadores não Comutativos

Como discutido na observação 2.1, página 21, para se obter a diagonalização simultânea das matrizes P_j e Q_j, através do lema (2.1), utiliza-se que tais matrizes comutam, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, o que equivale a afirmar que

$$[p(x, D_x), q(x, D_x)] = 0. \tag{5.9}$$

Nesta seção apresentamos um exemplo de operador L para o qual a condição (5.9) não é satisfeita, e analisamos algumas das consequências no estudo da regularidade de L.

Para isso, sejam P e Q as matrizes reais

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & \tau \\ \tau & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}.$$

tais que $b_1 \neq b_2$ e $\tau \neq 0$. Neste caso,

$$[P,Q] = \begin{pmatrix} 0 & \tau(b_2 - b_1) \\ \tau(b_1 - b_2) & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Seja $\{e_1^j(x), e_2^j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base do espaço $L^2(\mathbb{T}_x)$ formada pelas autofunções do Laplaciano Δ_x. Fixada uma sequência de números reais $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, tal que $|\mu_j| = \mathrm{O}(j^\delta)$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$, defina as sequências de matrizes

$$P_j \doteq P\mu_j \quad \text{e} \quad Q_j \doteq Q\mu_j, \; j \in \mathbb{N}.$$

Agora, para cada $u = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2} u_k^j e_k^j \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}_x)$, defina

$$p(x,D_x)u = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle P_j \cdot u^j \,,\, e^j(x) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \quad \text{e} \quad q(x,D_x)u = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle Q_j \cdot u^j \,,\, e^j(x) \right\rangle_{\mathbb{C}^2}.$$

Note que reescrevendo $P = A + B$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} p(x,D_x)u &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\langle \mu_j (A+B) \cdot u^j \,,\, e^j(x) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\{ (\mu_j a_1 u_1^j) e_1^j(x) + (\mu_j a_2 u_2^j) e_2^j(x) \right\} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\{ (\mu_j \tau u_2^j) e_1^j(x) + (\mu_j \tau u_1^j) e_2^j(x) \right\} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2} \gamma_k^j e_k^j + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2} \beta_k^j e_k^j \\ &\doteq P_\gamma \cdot u + P_\beta \cdot u. \end{aligned}$$

Como $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}_x)$, existe N_0 satisfazendo

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |u_k^j|^2 j^{N_0} < +\infty, \quad k = 1,2,$$

então para $N_1 = N_0 - 2\delta$ segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_k^j|^2 j^{N_1} &\leqslant C \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_k^j|^2 j^{2\delta} j^{N_1} \\ &\leqslant C \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_k^j|^2 j^{N_0} < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, $P_\gamma \cdot u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}_x)$ e analogamente $P_\beta \cdot u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}_x)$. Segue disso que $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ definem operadores lineares de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}_x)$ para $\mathscr{D}'(\mathbb{T}_x)$. Pelas proposições 5.1 e 5.2, segue que:

i. $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ tem extensão contínua $H^s(\mathbb{T}) \to H^{s-\delta}(\mathbb{T})$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

ii. Se $\sup_{j\in\mathbb{N}} |\mu_j| = \mu$, então $p(x,D_x)$ e $q(x,D_x)$ se estendem continuamente a $L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, com

$$||p(x,D_x)||_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{T}))} = \mu\, ||P||_\infty \quad e \quad ||q(x,D_x)||_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{T}))} = \mu\, ||Q||_\infty.$$

Considere agora o operador

$$L = D_t + p(x,D_x) + iq(x,D_x), \quad (t,x) \in \mathbb{T}_t \times \mathbb{T}_x, \tag{5.10}$$

para o qual

$$[p(x,D_x),\Delta] = [q(x,D_x),\Delta] = 0 \quad \text{e} \quad [p(x,D_x), q(x,D_x)] \neq 0.$$

Assim, dada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$, solução de $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, obtém-se a sequência de equações

$$D_t U_j(t) + \mu_j C \cdot U_j(t) = F_j(t), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{5.11}$$

sendo U_j e F_j como em (2.6) e

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & \tau \\ \tau & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & \tau \\ \tau & a_2 + ib_2 \end{pmatrix}.$$

O seguinte resultado nos permite diagonalizar a matriz C.

Lema 5.5 *Suponha que $b_1 = -b_2$, $a_1 = a_2$ e defina $b = |b_1| = |b_2|$. Se $b < |\tau|$, então C é diagonalizável.*

Demonstração: Sejam $a = a_1 = a_2$ e

$$\mathrm{Pol}_C(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2 - \tau^2)$$

o polinômio característico de C. Observe que Pol_C possui raízes reais se, e somente se, $b \leqslant |\tau|$. Neste caso, existem duas raízes reais e distintas dadas por

$$\lambda = a \pm \sqrt{-b^2 + \tau^2}, \tag{5.12}$$

e portanto C é diagonalizável.

∎

O seguinte teorema caracteriza completamente a hipoeliticidade global para operador L.

Teorema 5.6 *Nas condições do lema 5.5 o operador L é (GH) se, e somente se, cada uma das raízes* (5.12) *é não-Liouville com respeito a sequência $\{\mu_j\}$ e são finitos os conjuntos $\Gamma_\ell = \{j \in \mathbb{N};\ \mu_j \lambda_\ell \in \mathbb{Z}\}$, $\ell = 1, 2$.*

Demonstração: As coordenadas do sistema 5.11, já na sua forma diagonal, são dadas por

$$\partial_t v_\ell^j + i\mu_j\lambda_\ell v_\ell^j(t) = g_\ell^j(t),\ \ell = 1,2\ j \in \mathbb{N}$$

cujas soluções, para $\mu_j\lambda_\ell \notin \mathbb{Z}$, são

$$v_\ell^j(t) = \left(1 - e^{-2\pi i\lambda_\ell\mu_j}\right)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda_\ell\mu_j s} g_\ell^j(t-s)\,ds. \tag{5.13}$$

Assim, o comportamento de $\{v_\ell^j(t)\}$ depende apenas do termo $|1 - e^{-2\pi i\lambda_\ell\mu_j}|^{-1}$, logo basta repetir a demonstração da proposição 4.5, página 41.

■

Observação 5.3 *Note que a condição "λ_ℓ é não-Liouville com respeito a μ_j" depende de ambos os operadores $p(x,D)$ e $q(x,D)$, diferentemente do caso comutativo.*

Desta forma, mesmo sendo possível reescrever o sistema (5.11) *na forma diagonal, ainda assim obtemos resultados diferentes do esperado. Além disso, como observado no final da seção 5.1, conclui-se que podem existir operadores de coeficientes constatantes com parte imaginária diferente de zero, não trocando de sinal, e ainda assim serem não (GH).*

O próximo lema nos permite fazer mais algumas observações sobre o operador L em 5.10.

Lema 5.7 *Se $b_1 b_2 > 0$ então a matriz C, dada em* (5.10)*, é diagonalizável.*

Demonstração: Se λ é uma raiz de $\mathrm{Pol}_C(\lambda)$, obtém-se

$$\mathrm{Pol}_C(\lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) - b_1 b_2 - \tau^2 + i[b_1(a_2 - \lambda) + b_2(a_1 - \lambda)] = 0.$$

Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma \doteq \begin{cases} a_2 - \lambda = s b_2 \\ a_1 - \lambda = -s b_1 \\ (1+s^2) b_1 b_2 + \tau^2 = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação de γ tem-se $b_1 b_2 = -\tau^2/(1+s^2)$, a qual é impossível, pois $\tau \neq 0$ e $b_1 b_2 > 0$. Logo Pol_C possui apenas raízes complexas ξ_ℓ, $\ell = 1,2$.

■

Note agora que o sistema (5.13) assume a forma

$$\partial_t v_\ell^j + i\mu_j\xi_\ell v_\ell^j(t) = g_\ell^j(t),\ \ell = 1,2\ j \in \mathbb{N},$$

de modo que $i\mu_j\xi_\ell \in i\mathbb{Z}$ se, e somente se, $\mu_j = 0$ e $\mu_j \mathrm{Re}(\xi_\ell) \in \mathbb{Z}$.

Se admitirmos $|\mu_j| > C$, para algum $C > 0$ e para todo $j \geq j_0$, então segue das discussões da seção anterior que o operador L é (GH), pois neste caso as estimativas para $\{v_\ell^j\}$ dependerão apenas de

$$\Theta_j = \left|1 - e^{2\pi\mu_j(\mathrm{Im}(\xi_\ell) - i\mathrm{Re}(\xi_\ell))}\right|^{-1}.$$

Por outro lado, se $\{\mu_j\}$ se aproxima de zero, então obtemos novamente os fenômenos da seção 5.1, nos quais temos a dependência da aproximação de $\{\mu_j \mathrm{Re}(\xi_\ell)\}$ ao conjunto $\mathbb{Z}$. Repete-se ainda o fato da condição não-Liouville depender de ambos operadores p e q.

Por fim, consideramos agora o caso em que C não pode ser diagonalizável.

Lema 5.8 *Suponha que $b_1 b_2 < 0$, $b_1 + b_2 \neq 0$ e*

$$\tau^2 = -b_1 b_2 \left[1 + \left(\frac{a_1 - a_2}{b_1 + b_2}\right)\right]$$

Então, Pol_C possui uma única raiz real

$$\lambda = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1 + b_2}.$$

Demonstração: Basta utilizar o sistema γ dado na demonstração do lema 5.7.

■

Nestas condições, suponha que

$$C \sim J \doteq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema (5.11) pode ser escrito com

$$D_t V_j(t) + \mu_j J \cdot V_j(t) = G_j(t), \; t \in \mathbb{T}, j \in \mathbb{N},$$

Admitindo $\mu_j \lambda \notin \mathbb{Z}$, a solução de (5.11) pode ser escrita como

$$V_j(t) = e^{-it\mu_j\lambda J} \cdot \left[\Lambda_j + \int_0^t e^{i\mu_j s\lambda J} \cdot G_j(s) ds\right],$$

sendo

$$\begin{aligned}\Lambda_j &= \left(I - e^{-i2\pi\mu_j\lambda J}\right)^{-1} \\ &= (1 - e^{-i2\pi\mu_j\lambda})^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{i2\pi\mu_j}{1 - e^{-i2\pi\mu_j\lambda}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, se $\{\mu_j\}$ não possui subsequência convergindo para zero, então L é (GH) se, e somente se, λ é não-Liouville com respeito a $\{\mu_j\}$. Novamente tem-se λ dependendo de ambos operadores p e q.

Por outro lado, se $\{\mu_j\}$ se aproxima de zero, então obtemos novamente os fenômenos da seção 5.1.

Capítulo 6

Uma Classe Mais Geral de Operadores

Neste trabalho estudamos a hipoeliticidade global do o operador

$$L = D_t + a(t)p(x, D_x) + i b(t)q(x, D_x),\ (t, x) \in \mathbb{T} \times M,$$

sendo $p(x, D_x)$, $q(x, D_x)$ operadores pseudodiferencias em $\Psi^1(M)$, os quais comutam com um operador elíptico $E(x, D_x) \in \mathscr{E}^m(M)$, o qual define uma base ortonormal de autofunções $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $L^2(M)$, de modo que cada auto-espaço E_{λ_j} possui dimensão finita d_j e o espectro $spec(E) = \{\lambda_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ coincide com o conjunto de autovalores de E.

Em especial, as propriedades cruciais dos operadores pseudodiferencias utilizadas são:

- os autovalores λ_j do operador E cumprem a fórmula assintótica de Weyl, isto é,

  $$\lambda_j \sim \kappa\ j^{\frac{m}{n}},\ j \to \infty,$$

  para alguma constante positiva κ;

- os operadores $p(x, D_x)$, $q(x, D_x)$ são contínuos de $\mathscr{H}^s(M)$ em $\mathscr{H}^{s-1}(M)$, para cada $s \in \mathbb{R}$;

- as sequências numéricas $\{\mu_j\}$ e $\{\nu_j\}$, dadas por

  $$p(x, D)\varphi_j = \mu_j \varphi_j \quad \text{e} \quad q(x, D)\varphi_j = \nu_j \varphi_j,$$

  satisfazem a condição

  $$|\mu_j| = O(j^{1/n}) \ \text{ e } \ |\nu_j| = O(j^{1/n}),$$

  quando $j \to \infty$;

Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar algumas ideias de como podemos estender nossos resultados para uma classe mais geral de operadores, para os quais as propriedades acima são preservadas e pode-se recuperar o teorema principal.

Sejam H um espaço de Hilbert complexo, de dimensão infinita, Dom(A) um subespaço denso de H e $A : \mathrm{Dom}(A) \to H$ um operador linear auto-ajunto, não-limitado com inverso A^{-1} compacto.

Nestas condições, o espectro $spec(A) = \{\lambda_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ coincide com o conjunto de seus autovalores e determina sobre H uma base ortonormal de autovetores $\{e_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. Mais ainda:

(a) cada auto-espaço E_{λ_j} possui dimensão finita;

(b) $\lim_{j\to\infty} |\lambda_j| = \infty$;

No que segue admitiremos a seguinte hipótese: *existem constantes positivas κ e τ, tais que*

$$|\lambda_j| \sim \kappa\, j^{\tau},\ j \to \infty. \tag{6.1}$$

Definição 6.1 *Para cada $s \in \mathbb{R}$ as escalas de Espaços de Sobolev $\mathscr{H}^s$ são definidas da seguinte forma: para $s \geqslant 0$ tem-se o espaço*

$$\mathscr{H}^s \doteq \{u \in H;\, A^s \cdot u \in H\},$$

no qual defini-se a norma

$$||u||_s = ||A^s \cdot u||_H.$$

Por outro lado, se $s < 0$, então $\mathscr{H}^s$ denota o completamento de $\mathscr{H}$ com respeito a norma $||\cdot||_s$. Definimos ainda os espaços

$$\mathscr{H}^\infty = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}^s \quad e \quad \mathscr{H}^{-\infty} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}^s,$$

e neles consideramos suas topologias naturais.

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ denotamos por $C^k(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$ o espaço das funções de classe C^k definidas em $\mathbb{T}$ e avaliadas em $\mathscr{H}^k$. Assim, defini-se o espaço

$$C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty) \doteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty),$$

que consiste de todas as funções C^∞ em $\mathbb{T}$ e avaliadas em $\mathscr{H}^\infty$. Consideramos que $C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$ está dotado com sua topologia natural. Denota-se por $C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^{-\infty})$ o dual de $C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$ que consiste no espaço das funções C^∞ em $\mathbb{T}$ e avaliadas em $\mathscr{H}^{-\infty}$.

Proposição 6.1 *Tem-se $u \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

i. $\partial_t^k u(t,\cdot) \in \mathscr{H}^\infty$*, para cada* $k \in \mathbb{N}_0$*;*

ii. a aplicação $\Psi : \mathbb{T} \to \mathscr{H}^\infty$*, dada por*

$$t \longmapsto \Psi(t) \doteq u(t,\cdot) \in \mathscr{H}^\infty,$$

é contínua na topologia natural de $\mathscr{H}^\infty$*.*

A série de Fourier, com respeito a $x \in H$, de um elemento $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T} : \mathscr{H}^{-\infty})$ é dada por

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j(t)e_j(x), \; u_j(t) = (u(t,\cdot), e_j(x))_H,$$

a qual converge na topologia de $\mathscr{D}'(\mathbb{T} : \mathscr{H}^{-\infty})$, sendo $u_j \in C^\infty(\mathbb{T})$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Note que se $u \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$, então fixados $s \geqslant 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ obtemos da proposição 6.1, item (*i*), que

$$\begin{aligned} ||\partial_t^k u(t,\cdot)||_s &= \left\| A^s \cdot \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} \partial_t^k u_j(t) e_j \Big) \right\|_H = \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} \partial_t^k u_j(t) A^s \cdot e_j \right\|_H \\ &= \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} \partial_t^k u_j(t) \lambda_j^s e_j \right\|_H \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} |\partial_t^k u_j(t)|^2 \lambda_j^{2s} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant \varepsilon |\lambda_j|^{-s}, j \geqslant j_0.$$

Por outro lado, segue do item (*ii*), proposição 6.1, que

$$\begin{aligned} ||\Psi(t) - \Psi(t_0)||_s &= \left\| A^s \cdot \Big(\Psi(t) - \Psi(t_0) \Big) \right\|_H = \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} (u_j(t) - u_j(t_0)) A^s \cdot e_j \right\|_H \\ &= \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j(t) \lambda_j^s e_j \right\|_H \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j(t) - u_j(t_0)|^2 \lambda_j^{2s} < \infty, \end{aligned}$$

portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|u_j(t) - u_j(t_0)| \leqslant \varepsilon |\lambda_j|^{-s}, \; j \geqslant j_0.$$

Assim, obtemos de (6.1) o seguinte resultado:

Proposição 6.2 *$u \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$ se, e somente se, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ obtêm-se para todo $N > 0$ uma constante positiva C, tais que*

$$|\partial_t^k u_j(t)| \leqslant C j^{-N}, \; j \to \infty.$$

Sejam $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ operadores lineares auto-adjuntos de H, tais que as aplicações

$$\mathscr{P} : \mathscr{H}^s \to \mathscr{H}^{s-m} \quad \text{e} \quad \mathscr{Q} : \mathscr{H}^s \to \mathscr{H}^{s-m},$$

são contínuas, para algum $m > 0$ e $\forall s \in \mathbb{R}$.

Supondo válida a hipótese de comutatividade

$$[\mathscr{P}, A] = 0 \quad \text{e} \quad [\mathscr{Q}, A] = 0,$$

obtêm-se duas sequências de números reais $\{\nu_j\}$ e $\{\mu_j\}$, tais que

$$\mathscr{P} \cdot e_j = \mu_j e_j \quad \text{e} \quad \mathscr{Q} \cdot e_j = \nu_j e_j,$$

Segue da proposição 3.2, página 28, que existe uma constante positiva ρ tal que

$$|\mu_j| = \mathrm{O}(j^\rho) \quad \text{e} \quad |\nu_j| = \mathrm{O}(j^\rho),$$

para $j \to \infty$.

Portanto, tomando os operadores A, $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ como descritos acima podemos reobter todas as conclusões do teorema principal, quando se considera a seguinte noção de hipoeliticidade global:

Definição 6.2 *Dizemos que o operador*

$$\mathscr{L} = D_t + a(t)\mathscr{P} + i\,b(t)\mathscr{Q}, \ t \in \mathbb{T}.$$

é globalmente hipoelítico em $\mathbb{T}$ *se toda vez que*

$$u \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^{-\infty}) \quad e \quad \mathscr{L} u \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$$

tivermos $u \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathscr{H}^\infty)$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Bergamasco and S. Zani. Prescribing analytic singularities for solutions of a class of vector fields on the torus. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(10):4159–4174, 2005.

[2] A. P. Bergamasco. Perturbations of globally hypoelliptic operators. *Journal of Differential Equations*, 114(2):513–526, 1994.

[3] A. P. Bergamasco, P. D. Cordaro, and G. Petronilho. Global solvability for a class of complex vector fields on the two-torus. *Communications in Partial Differential Equations*, 29(5-6):785–819, 2004.

[4] W. Chen and M. Chi. Hypoelliptic vector fields and almost periodic motions on the torus $\mathbb{T}^n$. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(1-2):337–354, 2000.

[5] J. Delgado and M. Ruzhansky. Fourier multipliers, symbols and nuclearity on compact manifolds. *arXiv preprint arXiv:1404.6479*, 2014.

[6] J. Delgado and M. Ruzhansky. Schatten classes on compact manifolds: Kernel conditions. *Journal of Functional Analysis*, 267(3):772–798, 2014.

[7] J. Delgado Valencia and M. Ruzhansky. Kernel and symbol criteria for schatten classes and r-nuclearity on compact manifolds. *Comptes Rendus Mathematique*, 2014.

[8] G. Forni. On the greenfield-wallach and katok conjectures in dimension three. geometric and probabilistic structures in dynamics. *Contemp. Math*, 469:197–213, 2008.

[9] T. Gramchev, S. Pilipovic, and L. Rodino. Eigenfunction expansions in $\mathbb{R}^n$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(12):4361–4368, 2011.

[10] T. Gramchev, P. Popivanov, and M. Yoshino. Global solvability and hypoellipticity on the torus for a class of differential operators with variable coefficients. *Proceedings of the Japan Academy. Series A Mathematical sciences*, 68(3):53–57, 1992.

[11] T. Gramchev, P. Popivanov, and M. Yoshino. Global properties in spaces of generalized functions on the torus for second order differential operators with variable coefficients. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 51(2):144–174, 1993.

[12] S. J. Greenfield and N. R. Wallach. Global hypoellipticity and liouville numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 31:112–114, 1972.

[13] S. J. Greenfield and N. R. Wallach. Globally hypoelliptic vector fields. *Topology*, 12(3):247–253, 1973.

[14] S. J. Greenfield and N. R. Wallach. Remarks on global hypoellipticity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 183:153–164, 1973.

[15] J. Hounie. Globally hypoelliptic and globally solvable first-order evolution equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 252:233–248, 1979.

[16] J. Hounie. Globally hypoelliptic vector fields on compact surfaces. *Communications in Partial Differential Equations*, 7(4):343–370, 1982.

[17] A. Katok and R. Jr. Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory. *Proc. Sympos. Pure Math. 69 in Smooth Ergodic Theory and its Applications*, 2001.

[18] A. B. Katok. *Combinatorial constructions in ergodic theory and dynamics*. American Mathematical Soc., 2003.

[19] A. Kocsard. Cohomologically rigid vector fields: the katok conjecture in dimension 3. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 26(4):1165–1182, 2009.

[20] L. Nirenberg and F. Treves. On local solvability of linear partial differential equations i. necessary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23:1–38, 1970.

[21] L. Nirenberg and F. Treves. Remarks on the solvability of linear equations of evolution. *Symposia Mathematica (Convegno sulle Problemi di Evoluzione, INDAM, Rome)*, VII:325–338, 1971.

[22] G. Petronilho. Global hypoellipticity, global solvability and normal form for a class of real vector fields on a torus and application. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(12):6337–6349, 2011.

[23] M. Ruzhansky and V. Turunen. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics*, volume 2. Springer, 2009.

[24] R. Seeley. Integro-differential operators on vector bundles. *Transactions of the American Mathematical Society*, 117:167–204, 1965.

[25] M. A. Shubin. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer, 2001.

[26] F. Treves. Hamiltonian fields, bicharacteristic strips in relation with existence and regularity of solutions of linear partial differential equations. *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, pages 803–811, 1971.